МАТЕМАТИКА

УДК 517.51+517.53

ПОВЕДЕНИЕ L_p-КВАЗИНОРМЫ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ НА ПРЯМОЙ

Т.С. Мардвилко

Белорусский государственный университет, *Минск*

SHARP L_p-INEQUALITIES FOR DERIVATIVES OF BLASCHKE PRODUCTS ON THE STRAIGHT LINE

T.S. Mardvilko

Belarusian State University, *Minsk*

Получены экстремальные L_p-оценки для производных произведений Бляшке на прямой. В работе найдены супремум и инфимум квазинормы в пространстве Лебега L_p, $0 < p < \infty$, $p \neq 1/s$, на прямой от производных произведений Бляшке. Эти результаты дополняют исследования автора о нижней и верхней оценках квазинормы $\|\bullet\|_{L_{1/s}(\mathbb{R})}$ для s-й производной произведений Бляшке.

Ключевые слова: *рациональные функции*, *произведение Бляшке*, *неравенства типа Бернштейна*.

Extremal problems for the derivatives of Blaschke products in the Lebesgue space on a straight line are solved. The supremum and infimum of the seminorms $\|\bullet\|_{L_p(\mathbb{R})}$, $0 < p < \infty$, $p \neq 1/s$, from the derivatives of Blaschke products are obtained. Upper and lower inequalities for the higher derivatives of Blaschke products in the Lebesgue space $L_{1/s}(\mathbb{R})$ were obtained by the author earlier.

Keywords: *rational functions*, *Blaschke products*, *Bernstein type inequality*.

1 Основные результаты

Через $L_p(\mathbb{R})$, $0 < p < \infty$, обозначим пространство Лебега измеримых комплексных функций на $\mathbb{R}$ с конечной квазинормой (нормой при $1 \leq p < \infty$)

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Пусть $\mathrm{a}_n = \{a_1, ..., a_n\}$ – некоторый набор из n комплексных чисел, лежащих в верхней полуплоскости $\Pi = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$. Рассмотрим произведение Бляшке порядка n с нулями в точках $a_1, ..., a_n$:

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{z - \overline{a}_k}. \tag{1.1}$$

Для краткости изложения введем функцию

$$\lambda(\alpha) = 2^{\alpha} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)}, \ \alpha > 0,$$

где Γ – гамма-функция Эйлера.

В теоремах 1.1–1.5 описано поведение квазинормы $\|b_n^{(s)}\|_{L_p}$, $0 < p < \infty$.

***Теорема* 1.1.** *Для любых $n, s \in \mathbb{N}$ и любого произведения Бляшке b_n справедливы соотношения*

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty \ \text{ при } \ 0 < p \leq \frac{1}{s+1},$$

$$\|b_n^{(s)}\|_{L_p} < +\infty \ \text{ при } \ \frac{1}{s+1} < p < +\infty.$$

***Теорема* 1.2.** *Для $n, s \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{s+1} < p < \infty$, $p \neq \frac{1}{s}$, имеет место равенство*

$$\sup_{\mathrm{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty.$$

***Теорема* 1.3** [1]. *Для $n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеет место равенство*

$$\sup_{\mathrm{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} = s! \lambda^s (1/s) n^s.$$

***Теорема* 1.4.** *Для $n, s \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{s+1} < p < +\infty$, $p \neq \frac{1}{s}$, имеет место равенство*

$$\inf_{\mathrm{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = 0.$$

***Теорема* 1.5** [1]. *Для $n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеет место неравенство*

$$\inf_{\mathrm{a}_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}} \geq \frac{\pi^s (s-1)((s-2)!)^s}{16^s (s!)^{s-1}} n^s.$$

***Замечание* 1.1.** Для первой производной произведения Бляшке b_n известно равенство (см., например, [2]) $\|b_n'\|_{L_1} = 2\pi n$.

***Замечание* 1.2.** Как видно из приведенных выше результатов, только при одном значении параметра $p = \frac{1}{s}$ рассматриваемая квазинорма

$\left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p}$ при фиксированном $s \in \mathbb{N}$ и $n \to \infty$ ведет себя устойчиво относительно нулей $b_n(z)$ и имеет порядок n^s. Для всех остальных значений $\frac{1}{s+1} < p < +\infty$, $p \neq \frac{1}{s}$, квазинорма $\left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p}$ может при выборе параметров $a_1, ..., a_n$ становиться как сколь угодно большой, так и сколь угодно малой.

2 Доказательство основных результатов

***Лемма* 2.1.** *При любых* $\alpha > 0$ *и* $a \in \Pi$ *справедливо равенство*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(2\operatorname{Im} a)^{\alpha}}{|x-a|^{1+\alpha}} dx = \lambda(\alpha). \quad (2.1)$$

Доказательство. Сведем интеграл слева в (2.1) к интегралу Эйлера 1-го рода:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(2\operatorname{Im} a)^{\alpha}}{|x-a|^{1+\alpha}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{(2\operatorname{Im} a)^{\alpha}}{\left((x-\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2\right)^{\frac{1+\alpha}{2}}} dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{(2\operatorname{Im} a)^{\alpha}}{\left(x^2 + (\operatorname{Im} a)^2\right)^{\frac{1+\alpha}{2}}} dx = 2^{\alpha+1} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^{\frac{1+\alpha}{2}}} =$$

$$= 2^{\alpha+1} \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1+\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2^{\alpha} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}\right),$$

где B – бета-функция Эйлера.

Осталось воспользоваться связью между B-функцией и Γ-функцией Эйлера:

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\right)}. \quad \square$$

Через $c(...), c_1(...), c_2(...), ...$ будем обозначать положительные величины, зависящие от указанных в скобках параметров.

Доказательство теоремы 1.1. Произведение Бляшке вида (1.1) есть функция аналитическая в области $|z| > \rho$, где

$$\rho = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|\}.$$

При этом $b_n(\infty) = 1$. Поэтому $b_n(z)$ в области $|z| > \rho$ можно разложить в ряд Лорана:

$$b_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{z^k}.$$

Коэффициент β_1 в этом разложении имеет вид:

$$\beta_1 = \lim_{z \to \infty} z(b_n(z) - 1) =$$

$$= \lim_{z \to \infty} \frac{z\left(\prod_{k=1}^n (z-a_k) - \prod_{k=1}^n (z-\bar{a}_k)\right)}{\prod_{k=1}^n (z-\bar{a}_k)} =$$

$$= -2i \sum_{k=1}^n \operatorname{Im} a_k.$$

Так как $\operatorname{Im} a_k > 0$ для всех $k = 1, ..., n$, то $\beta_1 \neq 0$, и, следовательно,

$$\left| b_n^{(s)}(z) \right| \sim \frac{s!|\beta_1|}{|z|^{s+1}} \text{ при } |z| \to \infty.$$

Из полученной эквивалентности и признака сравнения сходимости несобственных интегралов получим утверждение теоремы 1.1. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Если $n = 1$ введем произведения Бляшке

$$b_1(x, r) = \frac{x - ir}{x + ir}, \; r > 0.$$

Поскольку

$$b_1^{(s)}(x, r) = (-1)^{s-1} s! \frac{2ir}{(x+ir)^{s+1}}, \; s \in \mathbb{N},$$

то, пользуясь леммой 2.1, находим

$$\left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p} = s! \left\| \frac{2r}{(x+ir)^{s+1}} \right\|_{L_p} = \frac{s!}{(2r)^{s-1/p}} \lambda^{1/p}(sp+p-1).$$

Из полученного выражения для квазинормы видно, что $\left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p} \to +\infty$ при $r \to +0$, если $p > \frac{1}{s}$, и при $r \to +\infty$ в случае $\frac{1}{s+1} < p < \frac{1}{s}$.

В случае $n \geq 2$ рассмотрим однопараметрическое семейство произведений Бляшке

$$b_n(x, r) = \frac{x-ir}{x+ir} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{x-a_k}{x-\bar{a}_k}, \; r > 0,$$

где нули $a_k = 2^k(1+i)$, а параметр

$$r \in E_n := (0,1] \cup [2^{n+1}, +\infty).$$

Разложим $b_n(x, r)$ на простейшие дроби:

$$b_n(x, r) = 1 + \frac{2rA_0}{x+ir} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^{k+1} A_k}{x - \bar{a}_k}. \quad (2.2)$$

Оценим $|A_0|$ снизу. При $r \in [2^{n+1}, +\infty)$ имеем

$$|A_0| = \left| i \prod_{k=1}^{n-1} \frac{ir + a_k}{ir + \bar{a}_k} \right| = \prod_{k=1}^{n-1} \left| 1 + \frac{a_k - \bar{a}_k}{ir + \bar{a}_k} \right| \geq$$

$$\geq \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2\operatorname{Im} a_k}{|ir + \bar{a}_k|} \right) \geq \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2^{k+1}}{|2^{n+1} i + \bar{a}_1|} \right) \geq$$

$$\geq \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2^{k+1}}{2^{n+1}} \right) \geq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}.$$

Если $r \in (0,1]$, то

$$|A_0| = \left| \prod_{k=1}^{n-1} \frac{ir + a_k}{ir + \bar{a}_k} \right| \geq$$

$$\geq \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2\operatorname{Im} a_k}{|ir + \bar{a}_k|} - 1 \right) \geq \prod_{k=1}^{n-1} \left(\frac{2^{k+1}}{1+2^k} - 1 \right) > \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}.$$

Таким образом, для всех $r \in E_n$ справедлива оценка

$$|A_0| \geq c_1(n). \quad (2.3)$$

Покажем, что $A_k, k = 1, ..., n-1$, равномерно по $r \in E_n$ ограничены сверху. Действительно, при $r \in (0,1]$ получим

$$| A_k | = \left| \frac{ir - \overline{a}_k}{ir + \overline{a}_k} \prod_{j \neq k} \frac{\overline{a}_k - a_j}{\overline{a}_k - \overline{a}_j} \right| \leq$$

$$\leq \frac{\left|2^k(1-i)\right| + 1}{\left|2^k(1-i)\right| - 1} \prod_{j \neq k} \frac{|\overline{a}_k| + |a_j|}{\left||\overline{a}_k| - |\overline{a}_j|\right|} \leq 3 \cdot 2^{(n-2)^2}. \tag{2.4}$$

Если $r \in [2^{n+1}, +\infty)$, то имеет место оценка

$$| A_k | \leq \frac{1 + \left|2^{k-n-1}(1-i)\right|}{1 - \left|2^{k-n-1}(1-i)\right|} \prod_{j \neq k} \frac{|\overline{a}_k| + |a_j|}{\left||\overline{a}_k| - |\overline{a}_j|\right|} \leq \tag{2.5}$$

$$\leq 3 \cdot 2^{(n-2)^2}.$$

Если $1 \leq p < \infty$, то для произведения Бляшке (2.2) выполняется

$$\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p} \geq s!\, A_0 \left\| \frac{2r}{(x+ir)^{s+1}} \right\|_{L_p} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} s!\, A_k \left\| \frac{2^{k+1}}{(x-\overline{a}_k)^{s+1}} \right\|_{L_p}.$$

В силу леммы 2.1 и оценок (2.3)–(2.5) из последнего неравенства имеем

$$\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p} \geq s!\, A_0 \frac{\lambda^{1/p}(ps+p-1)}{(2r)^{s-\frac{1}{p}}} - c_1(n,p,s) \to +\infty,$$

$$r \to +0.$$

При $\frac{1}{s+1} < p < 1$ соответственно получим

$$\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p}^p \geq (s!)^p A_0^p \left\| \frac{2r}{(x+ir)^{s+1}} \right\|_{L_p}^p -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} (s!\, A_k)^p \left\| \frac{2^{k+1}}{(x-\overline{a}_k)^{s+1}} \right\|_{L_p}^p \geq$$

$$\geq (s!)^p A_0^p \frac{\lambda(ps+p-1)}{(2r)^{sp-1}} - c_2(n,p,s).$$

Чтобы убедиться, что рассматриваемая квазинорма может неограниченно возрастать, достаточно при $\frac{1}{s} < p < 1$ в последнем неравенстве рассмотреть параметр $r \to +0$, а при $\frac{1}{s+1} < p < \frac{1}{s}$ параметр $r \to +\infty$. □

Доказательство теоремы 1.4. Рассмотрим произведение Бляшке с единственным полюсом кратности *n*:

$$b_n(x,a) = \left(\frac{x-a}{x-\overline{a}} \right)^n, \quad a \in \Pi.$$

Такое произведение Бляшке можно представить в виде

$$b_n(x,a) = \left(\frac{x - \overline{a} + (\overline{a} - a)}{x - \overline{a}} \right)^n =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-2i\,\mathrm{Im}\,a)^k}{(x-\overline{a})^k}.$$

Тогда *s*-ая производная $b_n(x,a)$ имеет вид:

$$b_n^{(s)}(x,a) = \sum_{k=1}^{n} c(k,s,n) \frac{(-2i\,\mathrm{Im}\,a)^k}{(x-\overline{a})^{k+s}}.$$

Если $p \geq 1$, то для оценки сверху L_p-нормы $b_n^{(s)}(x)$ воспользуемся леммой 2.1 и неравенством треугольника:

$$\left\|b_n^{(s)}\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} c(k,s,n) \left\| \frac{(2\,\mathrm{Im}\,a)^k}{(x-\overline{a})^{s+k}} \right\|_{L_p} \leq \frac{c_3(n,p,s)}{(\mathrm{Im}\,a)^{s-\frac{1}{p}}} \to 0,$$

$$\mathrm{Im}\,a \to +\infty.$$

В случае $\frac{1}{s+1} < p < 1$ воспользуемся леммой 2.1 и *p*-неравенством треугольника для соответствующей квазинормы:

$$\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p}^p \leq \sum_{k=1}^{n} (c(k,s,n))^p \left\| \frac{(2\,\mathrm{Im}\,a)^k}{(x-\overline{a})^{s+k}} \right\|_{L_p}^p \leq \tag{2.6}$$

$$\leq \frac{c_4(n,p,s)}{(\mathrm{Im}\,a)^{sp-1}}.$$

В случае $\frac{1}{s} < p < 1$ из (2.6) получаем, что $\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p}^p \to 0$ при $\mathrm{Im}\,a \to +\infty$. Если $\frac{1}{s+1} < p < \frac{1}{s}$, то $\left\|b_n^{(s)}\right\|_{L_p}^p \to 0$ при $\mathrm{Im}\,a \to +0$. □

3 Заключение

Через $C(\mathbb{R})$ обозначим пространство непрерывных комплекснозначных функций *f* на $\mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty.$$

Рассмотрим рациональные функции вида

$$r_n(z) = \frac{p_n(z)}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)},$$

где $p_n(z)$ – алгебраический многочлен степени не выше *n*, а $a_k \in \Pi$, $k = 1, \ldots, n$.

Для первой производной $r_n(z)$ Е.П. Долженко (см., например, [3]–[5]) получено следующее экстремальное неравенство

$$\|r_n'\|_{L_1} \leq 2\pi n \|r_n\|_{C(\mathbb{R})}. \tag{3.1}$$

Равенство в (3.1) достигается для функций вида

$$r_n(z) = c b_n(z), \quad c = const.$$

А.А. Пекарский [6] (см. также [4], [5]) обобщил (3.1) на высшие производные:

$$\left\|r_n^{(s)}\right\|_{L_{1/s}} \leq c(s) n^s \|r_n\|_{C(\mathbb{R})}, \quad s \geq 2. \tag{3.2}$$

Неравенства (3.2) являются точными по порядку, т. е. относительно множителя n^s. Точная постоянная в (3.2) пока не найдена. В [1] автором получены оценки постоянной $c(s)$ из неравенства (3.2). Важную роль при доказательстве этих результатов играют точечные и интегральные неравенства для высших производных произведений Бляшке.

Неравенства (3.1) и (3.2) в свою очередь применяются для доказательства обратных теорем рациональной аппроксимации [3]–[5].

Отметим, что ранее автором были получены интегральные неравенства для высших производных произведений Бляшке для круга [7], [8]. Интересно, что для $p \neq \frac{1}{s}$ поведение $\left\| b_n^{(s)} \right\|_{L_p}$, $0 < p < \infty$, отличается от аналогичных результатов для прямой.

Автор благодарит А.А. Пекарского за полезные замечания, которые способствовали улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мардвилко*, *Т.С.* О значении постоянных в неравенствах типа Бернштейна для высших производных рациональных функций на прямой / Т.С. Мардвилко // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. – 2009. – Серия 2, № 3 (27). – С. 18–25.

2. *Русак*, *В.Н.* Рациональные функции как аппарат приближения / В.Н. Русак // Минск: Изд-во БГУ, 1979.

3. *Pekarskii*, *A.A.* Approximation by rational functions with free poles / A.A. Pekarskii // East journal on approximations. – 2007. – Vol. 13, № 3. – P. 227–319.

4. *Lorenz*, *G.G.* Constructive Approximation. Advanced Problems / G.G. Lorenz, M.V. Golitschek, Y. Makovoz. – Berlin: Springer-Verlag, 1996.

5. *Petrushev*, P.P. Rational Approximations of Real Functions / P.P. Petrushev, V.A. Popov. – Cambridge: Univ. Press, 1987.

6. *Пекарский*, *А.А.* Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации / А.А. Пекарский // Матем. сб. – 1984. – Т. 124 (166), № 4 (8). – С. 571–588.

7. *Мардвилко*, Т.С. Интегральные неравенства для высших производных произведений Бляшке для круга / Т.С. Мардвилко // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2018. – № 1. – С. 10–16.

8. *Mardvilko*, T.S. On the value of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions / T.S. Mardvilko // East journal on approximations. – 2009. – Vol. 15, № 2. – P. 31–42.

Работа выполнена в рамках ГПНИ НАН Беларуси «Конвергенция».

Поступила в редакцию 04.09.19.