Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 6

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

Р. В. ДУДУЧАВА

ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА — ХОПФА, СОСТАВЛЕННЫЕ ИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ КУСОЧНО-ВИНЕРОВСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 3 IV 1972)

Кусочно-винеровскими будем называть функции вида $a(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\zeta)\varkappa_k(\zeta)$, $|\zeta| = 1$, где $a_k(\zeta)$ — функции, разлагающиеся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье, а $\varkappa_k(\zeta)$ — характеристические функции дуг единичной окружности. Класс кусочно-винеровских функций будем обозначать через ΠW. Пусть l_p, $1 \leqslant p < \infty$,— банахово пространство последовательностей $\xi = \{\xi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ с нормой $\|\xi\|_{l_p} = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p}$.

В настоящем сообщении исследуются дискретные уравнения Винера — Хопфа

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}\,\xi_k = \eta_j, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

в пространстве l_p, $1 < p < \infty$, в предположении, что $\{a_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ являются коэффициентами Фурье кусочно-винеровской функции $a(\zeta)$, $|\zeta| = 1$. Исследуются также системы дискретных уравнений Винера — Хопфа и некоторые другие уравнения.

1°. Пусть z и ζ — две точки комплексной плоскости. Через $\nu_p(z, \zeta)$, $1 < p < \infty$, обозначим дугу единичной окружности, соединяющую точки z и ζ и обладающую следующими свойствами: 1) в случае $p < 2$ из внутренних точек дуги $\nu_p(z, \zeta)$ отрезок, соединяющий точки z и ζ, виден под углом $\frac{p-1}{p}2\pi$ и направление от точки z к ζ ведет против часовой стрелки; 2) в случае $p > 2$ положим $\nu_p(z, \zeta) = \nu_q(\zeta, z)$, где $q = p/(p-1)$; 3) через $\nu_2(z, \zeta)$ обозначим отрезок прямой, соединяющей точки z и ζ.

Пусть теперь $a(\zeta) \in \Pi W$. Через $V_p(a)$ обозначим замкнутую естественным образом ориентированную кривую на комплексной плоскости, полученную добавлением к множеству значений функции $a(\zeta)$ кривых $\nu_p(a(c_k - 0), a(c_k + 0))$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — все точки разрыва функции $a(\zeta)$.

Если $0 \notin V_p(a)$, то через $\operatorname{ind}_p a$ обозначим число оборотов кривой $V_p(a)$ вокруг начала координат.

Уравнение кривой $V_p(a)$ можно записать в виде

$$a_p(\zeta, x) = a(\zeta - 0)g(x) + a(\zeta + 0)[1 - g(x)], \quad |\zeta| = 1;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $g(x) = e^{i(x-1)\theta} \sin x\theta / \sin\theta$ при $\theta \neq 0$ и $g(x) \equiv x$ при $\theta = 0$, а $\theta = \pi - 2\pi(p-1)/p$.

Через T_a будем обозначать бесконечную тёплицеву матрицу $T_a = \|a_{j-k}\|_{j,k=-\infty}^{\infty}$, составленную из коэффициентов Фурье функции $a(\zeta) \in \Pi W$.

Нетрудно убедиться, что функцию $a(\zeta) \in \Pi W$ можно представить в виде $a(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\zeta)\zeta^{\alpha_k}$, где $0 \leqslant \alpha_k < 1$, а $a_k(\zeta)$ — функция, разлагающаяся в абсолютно сходящийся ряд Фурье ($k = 1, 2, \ldots, n$); учитывая сказанное и опираясь на ограниченность оператора $T = \|(j - k + {}^1/_2)^{-1}\|_{j,k=1}^{\infty}$ в пространствах l_p, $1 < p < \infty$, доказанное Е. Титчмаршем и М. Риссом (см. ([1])) можно доказать, что оператор $T_a(a(\xi) \in \Pi W)$ ограничен в пространстве * l_p.

Теорема 1. *Пусть $a(\zeta) \in \Pi W$. Для того чтобы оператор T_a был Φ_+- или Φ_--оператором ** в пространстве l_p, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $a_p(\zeta, x) \neq 0$, $|\zeta| = 1$; $0 \leqslant x \leqslant 1$. Если это условие выполнено, то обратимость оператора T_a согласована с числом *** $\operatorname{ind}_p a$ и*

$$\operatorname{Ind} T_a = -\operatorname{ind}_p a.$$

Для пространства l_2 и кусочно-непрерывных функций $a(\zeta)$ теорема 1 установлена ранее в ([4]); для пространств **** h_p теорема, аналогичная 1, установлена ранее ***** в ([5]). Отметим, что метод доказательства теоремы 1 отличается от методов, предложенных в ([4, 5]) и опирается на следующую лемму.

Лемма. *Если элементы матрицы $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}$ удовлетворяют соотношениям*

$$a_{jk} = \frac{j^{\alpha}}{k^{\alpha}(j - k + \beta)}, \quad 0 < \beta < 1,$$

где

$$-1/p < \alpha < 1 - 1/p, \quad 1 < p < \infty, \tag{1}$$

то A является линейным ограниченным оператором в пространстве l_p.

Сформулированная лемма является дискретным аналогом теоремы Б. В. Хведелидзе о весах ([6]). Отметим, что условия (1) являются также необходимыми для ограниченности оператора A.

3°. Через $l_p^{(m)}$ будем обозначать банахово пространство векторных последовательностей $X = (X_1, \ldots, X_m)$, где $X_j \in l_p$; $\Pi W^{(m\times m)}$ — множество матриц-функций вида $\mathcal{G}(\zeta) = \|g_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^{m}$, где $g_{jk} \in \Pi W$; $T_{\mathcal{G}}$ — матрица, $T_{\mathcal{G}} = \|T_{g_{jk}}\|_{j,k=1}^{m}$; $\mathcal{G}_p(\zeta, x)$ — матрица-функция, $\mathcal{G}_p(\zeta, x) = \|(g_{jk})_p(\zeta, x)\|_{j,k=1}^{m}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{G}(\zeta) \in \Pi W^{(m\times m)}$. Для того чтобы оператор $T_{\mathcal{G}}$ был Φ_+- или Φ_--оператором в пространстве $l_p^{(m)}$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\det \mathcal{G}_p(\zeta, x) \neq 0$, $|\zeta| = 1$; $0 \leqslant x \leqslant 1$. Если это условие выполнено, то $T_{\mathcal{G}}$ является Φ-оператором в пространстве $l_p^{(m)}$ и*

$$\operatorname{Ind} T_{\mathcal{G}} = -\operatorname{ind}[\det \mathcal{G}_p(\zeta, x]: \tag{2}$$

4°. Через $\tilde{l}_p$, $1 < p < \infty$, будем обозначать банахово пространство последовательностей $\xi = \{\xi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ с нормой $\|\xi\|_{\tilde{l}_p} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p}$. $\tilde{T}_a$ — бесконечная матрица, $\tilde{T}_a = \|a_{j-k}\|_{j,k=1,\ldots,\infty}^{\infty}$, составленная из коэффициентов Фурье функции $a(\zeta)$ ($\in \Pi W$).

---

* Можно доказать, что если $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| = \infty$, то оператор $A = \|a_{j-k}\|_{j,k=1}^{\infty}$ не ограничен в пространстве l_1.

** Определение $\Phi_\pm$- и Φ-операторов, а также индекса Φ-оператора ($\operatorname{Ind} A$) см. в ([2]).

*** Говорят, что обратимость оператора A согласована с числом $\varkappa$ если A обратим, обратим только слева или обратим только справа в зависимости от того, является ли число $\varkappa$ равным нулю, положительным или отрицательным (см. ([3])).

**** Через h_p, $1 < p < \infty$, обозначается изометрическое пространству Харди H_p банахово пространство числовых последовательностей $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ коэффициентов Фурье функций из H_p.

***** Роль функции $a_p(\zeta, x)$ для пространства h_p играет функция $a_q(\zeta, x)$, $q = p/(p-1)$.

Доказывается, что $\tilde{T}_a$ является линейным ограниченным оператором в пространстве l_p, $1 < p < \infty$, для любой функции $a(\zeta) \in \Pi W$.

Через P и Q обозначим проекторы $P\{\xi_k\}_{k=-\infty}^{\infty} = \{\ldots, 0, \xi, \xi_k, \ldots\}$ и $Q = I - P$, где I — единичный оператор.

Теорема 3. *Пусть $a(\zeta)$, $b(\zeta) \in \Pi W$. Для того чтобы парный оператор $A = \tilde{T}_a P + \tilde{T}_b Q$ ($A = P\tilde{T}_a + Q\tilde{T}_b$) был Φ_+- или Φ_--оператором в пространстве l_p, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) $\inf |b(\zeta)| > 0$, $|\zeta| = 1$;

2) $(ab^{-1})_p(\zeta, x) \neq 0$, $|\zeta| = 1; 0 \leqslant x \leqslant 1$.

Если эти условия выполнены, обратимость оператора A согласована с числом $\mathrm{ind}_p(ab^{-1})$ *и*

$$\mathrm{Ind}\, A = -\mathrm{ind}_p(ab^{-1}). \tag{3}$$

Аналогичная теорема для пространства l_2 установлена в ([3]) и при доказательстве сформулированного предложения мы пользовались общей схемой, предложенной там.

5⁰. Через $l_p^{(m)}$ обозначим банахово пространство векторных последовательностей $X = (X_1, \ldots, X_m)$, где $X_j \in l_p$, а через $\tilde{T}_{\mathscr{G}}$, где $\mathscr{G}(\zeta) = \|g_{jk}(\zeta)\|_{j,k=1}^m \in \Pi W^{(m\times m)}$, матрицу $\tilde{T}_{\mathscr{G}} = \|\tilde{T}_{g_{jk}}\|_{j,k=1}^m$.

Пусть $\mathscr{C}(\zeta)$, $\mathscr{D}(\zeta) \in \Pi W^{(m\times m)}$. Символом оператора $A = \tilde{T}_{\mathscr{C}} P + \tilde{T}_{\mathscr{D}} Q$ в пространстве $\tilde{l}_p^{(m)}$, $1 < p < \infty$, назовем матрицу-функцию порядка $2m$, определенную равенством

$$\mathscr{A}_p(\zeta, x) = \left\| \begin{matrix} \mathscr{C}_p(\zeta, x) & [\mathscr{D}(\zeta+0) - \mathscr{D}(\zeta-0)]\, h(x) \\ [\mathscr{C}(\zeta+0) - \mathscr{C}(\zeta-0)] h(x) & \mathscr{D}_p(\zeta, x) \end{matrix} \right\|,$$
$$|\zeta| = 1;\ 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $h(x) = \sqrt{g(x)[1 - g(x)]}$, а

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x\theta}{\sin\theta}\, e^{i(x-1)\theta}, & \text{если } \theta \neq 0, \\ x, & \text{если } \theta = 0, \end{cases}$$

в которой $\theta = \pi - 2\pi(p-1)/p$.

Через $\mathfrak{R}^{(m)}$ обозначим алгебру операторов вида $A = \sum_{j=1}^{r} A_{j1} \ldots A_{js}$, где $A_{jk} = \tilde{T}_{\mathscr{C}_{jk}} P + \tilde{T}_{\mathscr{D}_{jk}} Q$ и $\mathscr{C}_{jk}(\zeta)$, $\mathscr{D}_{jk}(\zeta) \in \Pi W^{(m\times m)}$. Символом оператора A в пространстве $l_p^{(m)}$ назовем матрицу-функцию $\mathscr{A}_p(\zeta, x) = \sum_{j=1}^{r} (\mathscr{A}_{j1})_p(\zeta, x) \ldots$ $\ldots \mathscr{A}_{js})_p(\zeta, x)$, где $(\mathscr{A}_{jk})_p(\zeta, x)$ — символ оператора A_{jk}.

Методом, предложенным в ([7]), доказывается следующая

Теорема 5. *Если $A \in \mathfrak{R}^{(m)}$ и $\mathscr{A}_p(\zeta, x) = \|a_{jk}(\zeta, x)\|_{j,k=1}^{2m}$ — его символ, то*

$$\max_{|\zeta|=1,\ 0\leqslant x\leqslant 1} |a_{jk}(\zeta, x)| \leqslant \inf_{K\in\mathfrak{S}} \|A + K\|_{\tilde{l}_p^{(m)}}, \tag{4}$$

где $\mathfrak{S}$ — множество всех вполне непрерывных операторов в пространстве $\tilde{l}_p^{(m)}$.

Следствие 1. *Символ оператора $A \in \mathfrak{R}^{(m)}$ не зависит от представления этого оператора в виде*

$$A = \sum_{j=1}^{r} (T_{\mathscr{C}_{j1}} P + T_{\mathscr{D}_{j1}} Q)(T_{\mathscr{C}_{js}} P + T_{\mathscr{D}_{js}} Q).$$

С л е д с т в и е 2. *Отображение $A \to \mathscr{A}_p(\zeta, x)$ алгебры $\mathfrak{K}^{(m)}$ в алгебру символов является алгебраическим гомоморфизмом, ядро которого содержит множество всех вполне непрерывных операторов из алгебры $\mathfrak{K}^{(m)}$.*

6°. Обозначим через $\mathfrak{A}_p^{(m)}$ замыкание алгебры $\mathfrak{K}^{(m)}$ по норме операторов, действующих в пространстве $\tilde{l}_p^{(m)}$. Если $A \in \mathfrak{A}_p^{(m)}$ и $A = \lim_n A_n$, где $A_n \in \mathfrak{K}^{(m)}$, то в силу соотношения (4) символы операторов A_n равномерно сходятся к некоторой непрерывной матрице-функции $\mathscr{A}_p(\zeta, x)$, которую будем называть символом оператора A.

Т е о р е м а 6. *Для того чтобы оператор $A \in \mathfrak{A}_p^{(m)}$ был Φ_+- или Φ_--оператором в пространстве $\tilde{l}_p^{(m)}$, $1 < p < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы* $\det \mathscr{A}_p(\zeta, x) \neq 0$, $|\zeta| = 1$; $0 \leqslant x \leqslant 1$, *где* $\mathscr{A}_p(\zeta, x) = \|\mathscr{A}_{jk}(\zeta, x)\|_{j,k=1}^2$ — *символ оператора A. Если это условие выполнено, то A является Ф-оператором в пространстве $\tilde{l}_p^{(m)}$ и*

$$\operatorname{Ind} A = \operatorname{ind}\left[\frac{\det \mathscr{A}_p(\zeta, x)}{\det[\mathscr{A}_{22}(\zeta, 0)\,\mathscr{A}_{22}(\zeta, 1)]}\right].$$

Доказательство сформулированной теоремы ведется в основном по схеме, предложенной в ([7]) для исследования банаховой алгебры операторов, порожденной сингулярными интегральными операторами с кусочно-непрерывными коэффициентами в пространствах L_p с весом. В доказательстве теоремы 6 важную роль играет алгебра, порожденная операторами $T_{\mathscr{G}}(\mathscr{G}(\zeta) \in \Pi W^{(m\times m)})$, исследование которой ведется методом, предложенным в ([8]) в случае пространства $l_2^{(m)}$.

Автор выражает глубокую признательность И. Ц. Гохбергу и Б. В. Хведелидзе за полезные обсуждения.

Тбилисский математический институт им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
14 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Мацаев, ДАН, **139**, № 4 (1961). [2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, **12**, в. 2 (1957). [3] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, «Наука», 1971. [4] И. Ц. Гохберг, Функц. анализ и его прилож., **1**, в. 2 (1967). [5] I. C. Gohberg, N. Ja. Krupnik, Studia Math., **31**, № 4 (1968). [6] Б. В. Хведелидзе, Тр. Тбилисск. матем. инст. АН ГрузССР, **23** (1957). [7] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Изв. АН СССР, сер. матем., **35**, в. 4 (1971). [8] И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Функц. анализ и его прилож., 3, в. 2 (1969).