Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 3

УДК 534.26 ФИЗИКА

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

АКУСТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ГАЗЕ ОТ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛАСТИНКЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 1 VI 1972)

1. Рассмотрим движущуюся пластинку ширины d в неограниченной идеальной сжимаемой среде. Пластинка движется прямолинейно поступательно с дозвуковой скоростью u под углом атаки, равным нулю. Начиная с момента времени t_0 по поверхности пластинки распространяется фронт малых возмущений. Нормальная составляющая скорости точек поверхности пластинки задана соответственно на верхней и на нижней стороне пластинки: $v_n = A_в$ и $v_n = A_н$, где $A_в$ и $A_н$ — функции времени и точек поверхности пластинки — малые величины [1, 2].

Возьмем неподвижную систему осей координат Oxz. Начало O поместим в такую точку плоскости движения пластинки, где в момент времени t_0 находилась точка A пластинки, начиная от которой распространяются возмущения (рис. 1).

Закон движения пластинки задан в виде

$$x = F(t), \tag{1}$$

где F — произвольная непрерывная функция времени.

Фронт малых возмущений движется относительно пластинки по ее верхней стороне (точка C_1 на рис. 1) по закону $X = f_1(t)$ и по нижней

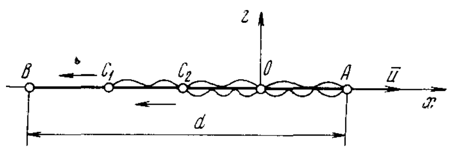

Рис. 1

(точка C_2) — по закону $X = f_2(t)$, где f_1 и f_2 — произвольные непрерывные функции времени. Переменная $X = x - F(t)$. Производные $|f_1'(t)| > c$ и $|f_2'(t)| > c$, где c — скорость звука в невозмущенном газе. Пусть $|f_1'| > |f_2'|$.

Потенциал скорости абсолютного движения газа будем искать в виде $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Функции φ_1 и φ_2 удовлетворяют волновому уравнению, условиям: $\varphi_1(x, -z, t) = -\varphi_1(x, z, t)$, $\varphi_2(x, -z, t) = \varphi_2(x, z, t)$ и граничным условиям на оси Ox.

Для интервала времени $t_0 < t < t_3$ (t_3 — момент, когда точка C_2 достигает границы B) производные φ_{1z} и φ_{2z}:

$$\varphi_{1z} = \begin{cases} 0, \\ {}^1/_2 A_в, \\ {}^1/_2 (A_в + A_н); \end{cases} \quad \varphi_{2z} = \begin{cases} 0, & F(t) - d \leqslant x < F(t) - f_1(t), \\ {}^1/_2 A_в, & F(t) - f_1(t) \leqslant x < F(t) - f_2(t), \\ {}^1/_2 (A_в - A_н); & F(t) - f_2(t) \leqslant x \leqslant F(t). \end{cases} \tag{2, 3}$$

$$A_в = A_в(x, t), \quad A_н = A_н(x, t).$$

Для $t \geqslant t_3$ всюду на пластинке $(F(t) - d \leqslant x \leqslant F(t))$ выполняется условие (3).

В любой момент времени перед пластинкой $(x > F(t))$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_{2z} = 0; \tag{4}$$

за пластинкой $(x < F(t) - d)$

$$\varphi_{1t} = 0, \quad \varphi_{2z} = 0. \tag{5}$$

Основные задачи в общем случае движущейся пластики в несжимаемой жидкости поставлены и решены Л. И. Седовым ([2], [3]). Задачи с учетом сжимаемости среды в случае установившихся колебаний пластинки решены М. Д. Хаскиндом ([4], [5]).

2. Обратимся к пространству (xzt) ([6], [7]). В плоскости (xt) определим области Σ и Σ', в которых соответственно заданы условия (2) и (3). Область Σ ограничена дугой B_1B_3 (кривая L_2) и кривыми L_3 и L_4 (рис. 2).

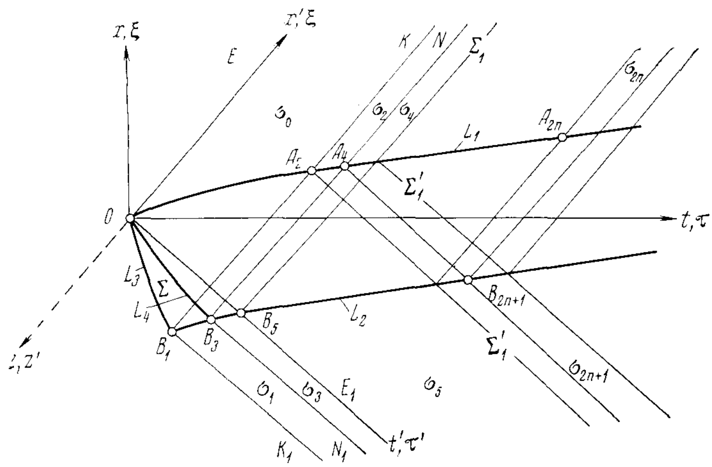

Рис. 2

Кривая L_2 изображает закон движения точки B. Кривые L_3 и L_4 изображают соответственно законы абсолютного движения точек C_1 и C_2. Определим область Σ_1, в которой заданы условия (4), и область Σ_1', в которой заданы условия (5). Пары прямых OE и OE_1, B_1K и B_1K_1, B_3N и B_3N_1 представляют собой линии пересечения плоскости (xt) с характеристическими конусами волнового уравнения. Границами области Σ_1 являются прямая OE и кривая L_1, изображающая закон движения точки A пластинки, а границами $\Sigma_1' - B_1K_1$ и L_2.

Характеристические конусы с вершинами в точках O, B_1, B_3 и в точках отражения прямых OE_1, B_1K, B_3N от границ области Σ' разделяют пространство (xzt), в частности плоскость (xt), на характерные области с различным аналитическим видом решения задачи (рис. 2) ([7]).

Потенциал скорости φ представим в виде формул (7) и (8) статьи ([7]). Производную φ_{1z} в областях Σ_1 и Σ_1' найдем из интегральных уравнений.

3. Обозначим неизвестную производную $\varphi_{1z'}{}^*$ в областях $\sigma_{2n} \subset \Sigma_1$ через θ_{2n} и в областях $\sigma_{2n+1} \subset \Sigma_1'$ через ϑ_{2n+1}, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Отправляясь от условия (4), построим интегральные уравнения для функций θ_{2n} и решим их по методу, предложенному ранее ([8], [9]):

$$\theta_{2n}(x', t') = \frac{1}{\pi} \frac{f_{2n}[\mathscr{F}_1(t'), t']}{\sqrt{x' - \mathscr{F}_1(t')}} + \frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathscr{F}_1(t')}^{x} \frac{\partial}{\partial \xi'} [f_{2n}(\xi', t')] \frac{d\xi'}{\sqrt{x' - \xi'}}. \tag{6}$$

Функция f_{2n} при $n = 0$

$$f_0(x', t') = -\frac{1}{2} \int\limits_{\chi_1(t')}^{\mathscr{F}_1(t')} A_{\text{в}}^*(\xi', t') \frac{d\xi'}{\sqrt{x' - \xi'}} - \frac{1}{2} \int\limits_{\chi_2(t')}^{\mathscr{F}_1(t')} A_{\text{н}}^*(\xi', t') \frac{d\xi'}{\sqrt{x' - \xi'}};$$

при $n=1$

$$f_1(x',t') = -\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{F}_2^0(t')}^{\mathcal{F}_1(t')} A_{\text{в}}^*(\xi',t')\frac{d\xi'}{\sqrt{x'-\xi'}} - \frac{1}{2}\int\limits_{\chi_2(t')}^{\mathcal{F}_1(t')} A_{\text{н}}^*(\xi',t')\frac{d\xi'}{\sqrt{x'-\xi'}} - \int\limits_{x_1'}^{\mathcal{F}_2^0(t')} \vartheta_1(\xi',t')\frac{d\xi'}{\sqrt{x'-\xi'}};$$

при $n \geqslant 2$

$$f_{2n}(x',t') = -\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{F}_2^0(t')}^{\mathcal{F}_1(t')} [A_{\text{в}}^*(\xi',t') + A_{\text{н}}^*(\xi',t')]\frac{d\xi'}{\sqrt{x'-\xi'}} - \sum_{i=0}^{n-2}\int\limits_{x_{2i+1}'}^{x_{2i+3}'} \vartheta_{2i+1}(\xi',t')\frac{d\xi'}{\sqrt{x'-\xi'}} - \int\limits_{x_{2n-1}'}^{\mathcal{F}_2^0(t')} \vartheta_{2n-1}(\xi',t')\frac{d\xi'}{\sqrt{x'-\xi'}},$$

где функции $\xi'=\mathcal{F}_1(\tau')$, $\xi'=\mathcal{F}_2^0(\tau')$, $\xi'=\chi_1(\tau')$, $\xi'=\chi_2(\tau')$ — соответственно уравнения кривых L_1, L_2, L_3, L_4 в характеристических переменных, а пределы интегрирования x_{2j+1}' — координаты точек B_{2j+1}, $j=0, 1, 2, \ldots, 2n-1$.

Используя условие (5) и условие на кривой L_2

$$\vartheta_{2n+1}[x',\mathcal{F}_2(x')] = \begin{cases} {}^1/_2 A_{\text{в}}^*[x',\mathcal{F}_2(x')], & x_1' < x' < x_3', \\ {}^1/_2 A_{\text{в}}^*[x',\mathcal{F}_2(x')] + {}^1/_2 A_{\text{н}}^*[x',\mathcal{F}_2(x')], & x' > x_3', \end{cases} \tag{7}$$

которое следует из принципа Чаплыгина — Жуковского, построим интегро-дифференциальные уравнения для ϑ_{2n+1} и решим [8, 9] их относительно $\vartheta_{(2n+1)x'} + \vartheta_{(2n+1)t'}$:

$$\vartheta_{(2n+1)x'}(x',t') + \vartheta_{(2n+1)t'}(x',t') = \frac{1}{\pi}\frac{f_{2n+1}[x',\mathcal{F}_2(x')]}{\sqrt{t'-\mathcal{F}_2(x')}} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{F}_2(x')}^{t'} \frac{\partial}{\partial\tau'}[f_{2n+1}(x',\tau')]\frac{d\tau'}{\sqrt{t'-\tau'}}. \tag{8}$$

Функция f_{2n+1} при $n=0$

$$f_1(x',t') = -\frac{1}{2}\frac{A_{\text{в}}^*[x',\chi_1^0(x')]}{\sqrt{t'-\chi_1^0(x')}}\left\{1-\frac{d\chi_1^0(x')}{dx'}\right\} - \frac{1}{2}\int\limits_{\chi_1^0(x')}^{\mathcal{F}_2(x')} [A_{\text{в}x'}^*(x',\tau') + A_{\text{в}\tau'}^*(x',\tau')]\frac{d\tau'}{\sqrt{t'-\tau'}};$$

при $n=1$

$$f_3(x',t') = f_1(x',t') - \frac{1}{2}\frac{A_{\text{н}}^*[x',\chi_2^0(x')]}{\sqrt{t'-\chi_2^0(x')}}\left\{1-\frac{d\chi_2^0(x')}{dx'}\right\} - \frac{1}{2}\int\limits_{\chi_2^0(x')}^{\mathcal{F}_2(x')} [A_{\text{н}x'}^*(x',\tau') + A_{\text{н}\tau'}^*(x',\tau')]\frac{d\tau'}{\sqrt{t'-\tau'}};$$

при $n \geqslant 2$

$$f_{2n+1}(x', t') = -\frac{1}{2}\frac{A_{\text{в}}^*[x', \mathscr{F}_1^0(x')] + A_{\text{н}}^*[x', \mathscr{F}_1^0(x')]}{\sqrt{t' - \mathscr{F}_1^0(x')}}\left\{1 - \frac{d\mathscr{F}_1^0(x')}{dx'}\right\} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathscr{F}_1^0(x')}^{\mathscr{F}_2(x')} [A_{\text{в}x'}^*(x', \tau') + A_{\text{в}\tau'}^*(x', \tau')]\frac{d\tau'}{\sqrt{t' - \tau)}} -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathscr{F}_1^0(x')}^{\mathscr{F}_2(x')} [A_{\text{н}x'}^*(x', \tau') + A_{\text{н}\tau'}^*(x', \tau')]\frac{d\tau'}{\sqrt{t' - \tau'}} -$$

$$-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{t'_{2i}}^{t'_{2i+2}} \theta_{2i}(x', \tau')\frac{d\tau'}{\sqrt{t' - \tau'}} - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{t'_{2n-4}}^{\mathscr{F}_1^0(x')} \theta_{2n-4}(x', \tau')\frac{d\tau'}{\sqrt{t' - \tau'}},$$

где функции $\mathscr{F}_1^0$, $\mathscr{F}_2$, χ_1^0, χ_2^0 — обращения функций $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2^0$, χ_1, χ_2, а пределы интегрирования t_{2j} — координаты точек A_{2j}, $j = 1, 2, 3, \ldots, n-2$. Операция $\partial / \partial t = \partial / \partial x' + \partial / \partial t'$.

Интегрируя решения (8) по направлению, параллельному оси времени, при этом имея в виду условие (7) и условие на прямой B_1K_1: $\varphi_{1z} = 0$, найдем функции ϑ_{2n+1}.

Итак, последовательно вычисляются функции θ_0, ϑ_1, ϑ_2, $\vartheta_3, \ldots$, θ_{2n}, ϑ_{2n+1} для любого номера n.

4. Приложим, в частности, результаты к задаче о дифракции звуковой волны на жесткой пластинке. Пусть пластинка движется с дозвуковой скоростью по закону (1). На пластинку набегает звуковая волна с плоским фронтом под углом $\pi / 2 - \beta$ (рис. 1 статьи ([6])). Потенциал скорости $\Phi = \varphi_1^* + \varphi_\omega^*$. Потенциал φ_1^* получим, если в формулах (7) и (8) статьи ([7]) и в найденных выше решениях (6) и (8) настоящей статьи положим функцию $A_{\text{в}}^*(\xi', \tau') = A_{\text{н}}^*(\xi', \tau') = -[\overset{*}{\varphi}_{\omega z'}(\xi', z', \tau')]_{z'=0}$ и функцию $\chi_1(\tau') = \chi_2(\tau') = -\tau' \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}$. Функция φ_ω^* — заданный потенциал скорости в набегающей волне.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
23 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Седов, Механика сплошной среды, 2, 1970. [2] Л. И. Седов, Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, изд. 2, 1966. [3] Л. И. Седов, УМН, в. 5 (1940). [4] М. Д. Хаскинд, ЖЭТФ, 16, в. 7 (1946). [5] М. Д. Хаскинд, ПММ, 11, в. 1 (1946). [6] Е. А. Красильщикова, ДАН, 203, № 2 (1972). [7] Е. А. Красильщикова, ДАН, 208, № 5 (1973). [8] Е. А. Красильщикова, Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке, 1952. [9] E. A. Krassilchtchikova, Method of Integral Equation in the Thin Wing Theory in a Compressible Medium, IX Congr. Intern. de Mécanique Appliques, 3, Université de Bruxelles, 1957.