Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 6

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

П. В. ПОПОВ

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ СПЕКТРА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 V 1972)

В этой работе получены вариационные принципы для модулей и вещественных частей собственных значений (в общем случае для спектрального радиуса и границы вещественной части спектра) несамосопряженного оператора без каких бы то ни было ограничений на характер несамосопряженности.

Всюду в дальнейшем $\mathfrak{H}$ означает комплексное гильбертово пространство, оператор в $\mathfrak{H}$ — это всегда линейный ограниченный оператор, $\sigma(T)$, $r(T)$, $w(T)$ — соответственно спектр, спектральный и числовой радиусы оператора (T) [1]. Число $\operatorname{re}(T)=\max\limits_{\lambda\in\sigma(T)}\operatorname{Re}\lambda$ будем называть границей вещественной части спектра. Через $\mathfrak{L}_\lambda(T)$ обозначим корневой линеал оператора T, соответствующий собственному значению λ [1]. $\oplus$ $(\ominus)$, $\sum^{\boldsymbol{\cdot}}$ — символы соответственно ортогональной суммы (разности) и прямой суммы.

Пусть T — компактный оператор. Обозначим через $\{r_n(T)\}$, $n=1, 2, \ldots$, убывающую последовательность модулей ненулевых собственных значений оператора T с учетом кратности (т. е. количество элементов последовательности, равных некоторому числу $c>0$, есть сумма алгебраических кратностей собственных значений [1], лежащих на окружности радиуса c). Аналогичным образом для собственных значений, расположенных в открытой правой полуплоскости, определим убывающую последовательность $\{\operatorname{re}_n(T)\}$, $n=1, 2, \ldots$, вещественных частей собственных значений, причем количество элементов последовательности, равных некоторому $c>0$, есть сумма алгебраических кратностей собственных значений, лежащих на прямой $\{z\colon \operatorname{Re} z=c\}$.

В дальнейшем условимся символы вида $\sigma(PTP)$, $r(PTP)$, $\mathfrak{L}_\lambda(PTP)$ и т. д., где P — ортпроектор на подпространство $\mathfrak{L}\subseteq\mathfrak{H}$, относить к пространству $\mathfrak{L}$.

Обозначим через $W_n(T)$, $U_n(T)$ множества ортпроекторов на всевозможные n-мерные подпространства, инвариантные относительно T, такие, что, если $P\in W_n(T)$, то $r_i(PTP)=r_i(T)$, $i=1, \ldots, n$ (соответственно $\operatorname{re}_i(PTP)=\operatorname{re}_i(T)$, $i=1, \ldots, n$, для всякого $P\in U_n(T)$).

Теорема 1. *Пусть T компактный оператор; тогда*

$$r_{n+1}(T)=\max_{\substack{x\in\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{L}_n\\ (x,y)=1}}\ \min_{y\in\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{L}_n}|(Tx,y)|,\quad n=0,1,\ldots,\tag{1}$$

$$\operatorname{re}_{n+1}(T)=\max_{\substack{x\in\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{L}_n\\ (x,y)=1}}\ \inf_{y\in\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{L}_n}\operatorname{Re}(Tx,y),\quad n=0,1,\ldots,\tag{2}$$

где $\mathfrak{L}_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\oplus\{x_i\}$ — подпространство, порожденное первыми n векторами, максимизирующими (1) ((2)). Обозначим через P_n ортпроектор на $\mathfrak{L}_n$, $Q_n=I-P_n$.

1) *Максимум в (1) ((2)) достигается на собственных векторах оператора Q_nTQ_n, соответствующих собственным значениям $\lambda\in\sigma(Q_nTQ_n)$ таким, что $|\lambda|=r(Q_nTQ_n)$ $(\operatorname{Re}\lambda=\operatorname{re}(Q_nTQ_n))$.*

2) *Пусть x_{n+1} — один из таких векторов и λ — соответствующее собственное значение; тогда $\lambda \in \sigma(T)$ и существует однозначно определяемый вектор $y_{n+1} + \mathfrak{L}_\lambda(T)$ такой, что $Q_n y_{n+1} = x_{n+1}$.*

3) $\mathfrak{L}_n = \sum\limits_{i=1}^{n}{}^{\cdot} \{y_i\}$, *причем* $P_n \in W_n(T)$ $(P \in U_n(T))$.

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму

Лемма 1. *Пусть T — компактный оператор, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$ — подпространство, инвариантное относительно T, P — ортпроектор на $\mathfrak{L}$, $Q = I - P$. Если* $\dim \mathfrak{L} < \infty$, *то*

1) $\sigma(T) = \sigma(QTQ) \cup \sigma(PTP)$;

2) $$\sum_{\lambda \in \sigma(QTQ) \cap \sigma(PTP)}{}^{\cdot} \mathfrak{L}_\lambda(QTQ) \oplus \mathfrak{L} = \sum_{\lambda \in \sigma(PTP)}{}^{\cdot} \mathfrak{L}_\lambda(T);$$

3) $\dim \mathfrak{L}_\lambda(QTQ) + \dim \mathfrak{L}_\lambda(PTP) = \dim \mathfrak{L}_\lambda(T)$ *для всякого* $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$.

По поводу п. 1 см ([2]), задача 57.

К вычислению (1), (2) можно подойти следующим образом: минимизировать функционал по всем $y \in \mathfrak{H}$, образующим фиксированный угол с вектором x, а затем перейти к пределу, устремив угол к $\pi/2$. Оказывается, что для всякого фиксированного угла минимум легко вычисляется.

Лемма 2. *Пусть T — оператор в $\mathfrak{H}$, $x \in \mathfrak{H}$, $|x| = 1$, $\rho \geqslant 0$; тогда:*

$$\min_{\substack{y \in \mathfrak{H},\ (x,y)=1 \\ \operatorname{tg}(\widehat{x,y})=\rho}} |(Tx, y)| = \varkappa\{|(Tx, x)| - \rho(|Tx|^2 - |(Tx, x)|^2)^{1/2}\}, \tag{3}$$

$$\min_{\substack{y \in \mathfrak{H},\ (x,y)=1 \\ \operatorname{tg}(\widehat{x,y})=\rho}} \operatorname{Re}(Tx, y) = \operatorname{Re}(Tx, x) - \rho(|Tx|^2 - |(Tx, x)|^2)^{1/2}, \tag{4}$$

где угол между векторами определяется с помощью соотношения

$$\cos(\widehat{x,y}) = \frac{|(x, y)|}{|x||y|},$$

$$\varkappa(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t > 0 \\ 0, & \text{если } t \leqslant 0. \end{cases}$$

Обозначим через $w(T, \rho, x)$ выражение, стоящее под знаком функции $\varkappa$ в (3), и через $u(T, \rho, x)$ — правую часть (4).

Лемма 3. *Пусть T — оператор в $\mathfrak{H}$. Функции*

$$w(T, \rho) = \sup_{x \in \mathfrak{H},\ |x|=1} w(T, \rho, x), \tag{5}$$

$$u(T, \rho) = \sup_{x \in \mathfrak{H},\ |x|=1} u(T, \rho, x) \tag{6}$$

обладают следующими свойствами:

1) $w(T, \rho_1) \leqslant w(T, \rho_2)$, $u(T, \rho_1) \leqslant u(T, \rho_2)$, *если* $\rho_1 \geqslant \rho_2$, $\rho_1\ \rho_2 \geqslant 0$;

2) $r(T) \leqslant w(T, \rho) \leqslant w(T)$, $\operatorname{re}(T) \leqslant u(T, \rho) \leqslant \operatorname{re}(T_R)$ *для всякого* $\rho \geqslant 0$, *где* $T_R = {}^1/_2(T + T^*)$;

3) $w(T, \rho) > 0$ *для всякого оператора* $T \neq 0$ *и всякого* $\rho \geqslant 0$;

4) *пусть $\{T_n\}$ — последовательность операторов, равномерно сходящаяся к оператору T, $\rho_n \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\rho_n \to \infty$ при $n \to \infty$; тогда, если* $r(T_n) \to r(T)$ $(\operatorname{re}(T_n) \to \operatorname{re}(T))$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} w(T_n, \rho_n) = r(T)$ $(\lim\limits_{n\to\infty} u(T_n, \rho_n) = \operatorname{re}(T))$;

5) *для всякого $\rho \geqslant 0$ и всякого компактного оператора T в (5) достигается максимум. Если, кроме того, T аккретивен, т. е.* $\operatorname{Re}(Tx, x) \geqslant 0$ *для всех $x \in \mathfrak{H}$, то максимум достигается в* (6).

Непосредственным следствием леммы 3, 4) является следующая

Теорема 2. *Пусть T — оператор в $\mathfrak{H}$; тогда*

$$r(T) = \lim_{\rho\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{H},\ |x|=1} \{|(Tx, x)| - \rho(|Tx|^2 - |(Tx, x)|^2)^{1/2}\}, \quad (7)$$

$$\mathrm{re}(T) = \lim_{\rho\to\infty} \sup_{x\in\mathfrak{H},\ |x|=1} \{\mathrm{Re}(Tx, x) - \rho(|Tx|^2 - |(Tx, x)|^2)^{1/2}\}. \quad (8)$$

Последовательность $\{r_n(T)\}$ была определена для ненулевых собственных значений оператора T и поэтому может оказаться конечной: $r_1(T), \ldots, r_n(T)$. В этом случае положим $r_k(T) = 0$, $k = n+1, \ldots$ Аналогично, если в открытой правой полуплоскости содержится n собственных значений оператора T, положим $\mathrm{re}_k(T) = 0$, $k = n+1, \ldots$ В дальнейшем будем иметь в виду именно эти расширенные последовательности.

Пусть $\rho \geqslant 0$ — произвольное фиксированное число. Для компактного оператора T определим величины

$$w_{n+1}(T, \rho) = \max_{\substack{x\in\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{L}_n(\rho)\\ |x|=1}} \{|(Tx, x)| - \rho(|Q_n(\rho)Tx|^2 - |(Tx, x)|^2)^{1/2}\}, \quad (9)$$

$$n = 0, 1, \ldots,$$

а если, кроме того, T аккретивен, величины

$$u_{n+1}(T, \rho) = \max_{\substack{x\in\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{L}_n(\rho)\\ |x|=1}} \{\mathrm{Re}(Tx, x) - \rho(|Q_n(\rho)Tx|^2 - |(Tx, x)|^2)^{1/2}\}; \quad (10)$$

$$n = 0, 1, \ldots,$$

здесь $\mathfrak{L}_n(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \oplus \{x_i(\rho)\}$ — подпространство, порожденное первыми n векторами, максимизирующими (9) ((10)).

Заметим, что аккретивность можно заменить любым другим условием, обеспечивающим существование максимизирующих векторов для всех $n = 0, 1, \ldots$

Теорема 3. *Пусть T — компактный (компактный и аккретивный) оператор, $\rho_m \geqslant 0$, $m = 1, 2, \ldots$, $\rho_m \to \infty$ при $m \to \infty$; тогда для всякого $n = 0, 1, \ldots$*

1) $\|Q_{n+1}(\rho_m)TP_{n+1}(\rho_m)\| \to 0$ *при* $m \to \infty$, *где* $P_{n+1}(\rho_m) = I - Q_{n+1}(\rho_m)$;

2) $r_{n+1}(T) = \lim_{m\to\infty} w_{n+1}(T, \rho_m)$ $(\mathrm{re}_{n+1}(T) = \lim_{m\to\infty} u_{n+1}(T, \rho_m))$;

3) *если* $r_{n+1}(T) > 0$ $(\mathrm{re}_{n+1}(T) > 0)$, *то замыкание множества* $\{Q_{n+1}(\rho_m)\}_{m=0}$ *в слабой топологии совпадает с замыканием его в равномерной топологии, причем если Q — точка сгущения, то* $I - Q \in W_{n+1}(T)$ $(I - Q \in U_{n+1}(T))$.

Лемма 3, 2) наводит на мысль о том, что неравенства $r_n(T) \leqslant w_n(T, \rho)$ $\mathrm{re}_n(T) \leqslant u_n(T, \rho)$, справедливые для $n = 1$ и $\rho \geqslant 0$, выполняются для всех $n = 1, 2, \ldots$ Это неверно, как показывает следующий пример: для оператора $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеем: $r_i(T) = \mathrm{re}_i(T) = 1$, $i = 1, 2$, тогда как $w_1(T, 0) = u_1(T, 0) = 2$, $w_2(T, 0) = u_2(T, 0) = 0$.

Автор выражает благодарность М. А. Гольдштику за внимание к работе.

Институт теплофизики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
27 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., 1965. [2] П. Халмош, Гильбертово пространство в задачах, М., 1970.