

М. Г. КРЕЙН, П. Я. НУДЕЛЬМАН

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА ХАРДИ И КONTИНУАЛЬНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ФУНКЦИЙ С ДВОЙНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТЬЮ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 19 VI 1972)

Через $\hat{L}_2(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, обозначается вещественное гильбертово пространство, состоящее из всех вещественных функций комплексного пространства $L_2(a, b)$. Через $\mathcal{F}$ обозначается ненормированный оператор Фурье — Планшереля в $L_2(-\infty, \infty)$ точнее, для $f \in L_2(-\infty, \infty)$

$$(\mathcal{F}f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad \left(= \text{l. i. m}_{N', N' \rightarrow \infty} \int_{-N'}^N e^{-i\omega t} f(t) dt \right).$$

Всякое $L_2(a, b)$ (когда хотя бы одно из чисел a, b конечно) рассматривается как подпространство в $L_2(-\infty, \infty)$, состоящее из соответствующим образом усеченных функций. Через $\mathbf{H}$ ($\mathbf{H}$) обозначается подпространство в $L_2(-\infty, \infty)$, на которое оператор $\mathcal{F}$ отображает $L_2(0, \infty)$ ($L_2(0, \infty)$). Таким образом, $F \in \mathbf{H}$ принадлежит $\hat{\mathbf{H}}$ точно тогда, когда F — эрмитова функция, т. е. $F(-\omega) = \overline{F(\omega)}$ почти всюду на оси.

Отправная задача. Задана некоторая эрмитова функция $F \in L_2(-1, 1)$ и число ε ($0 < \varepsilon \leq \|F\| / 2\pi$). Требуется найти $g \in L_2(0, \infty)$, имеющее наименьшую норму $\|g\|$, при условии, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 |F(\omega) - G(\omega)|^2 d\omega \leq \varepsilon^2, \quad G = \mathcal{F}(g). \quad (1)$$

Легко обнаруживается, что задача имеет одно и только одно решение (обозначаемое в дальнейшем g_ε), причем оно определяется из интегрального уравнения

$$\mu g(t) + \int_0^\infty \frac{\sin(t-s)}{\pi(t-s)} g(s) ds = f(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (2)$$

где $f = \mathcal{F}^{-1}(F)$, а $\mu = \mu(\varepsilon)$ — некоторая положительная функция аргумента ε . Эта функция в свою очередь определяется из уравнения (16); оказывается она монотонно стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$ и, более того, $\mu = \sqrt{2\pi} \varepsilon / \|F\| + O(\varepsilon^2)$.

2. Наши выводы существенно опираются на результаты статьи (1). В этой статье, в частности, показано, что функции

$$\chi_\tau(\omega) = \chi(\omega, \tau) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-\omega^2)}} \exp\left(\frac{i}{2\pi} \ln \frac{1+\omega}{1-\omega} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}\right) \quad (3)$$

аргумента ω и параметра τ , $-1 < \omega, \tau < 1$, образуют в $L_2(-1, 1)$ полную ортогональную систему обобщенных функций, нормированных к δ -функции.

Отсюда следует, что вещественные функции

$$\varphi(t; \lambda) = \int_{-1}^1 \chi(\tau) e^{i\omega t} d\omega, \quad \tau = \operatorname{th} \pi \lambda, \quad -\infty < t, \lambda < \infty, \quad (4)$$

образуют полную ортогональную систему обобщенных функций в пространстве $\mathbf{B}_1 (\subset \mathbf{L}_2(-\infty, \infty))$ *. Точнее, для любой функции $f \in \mathbf{B}_1$ существует в определенном смысле интеграл

$$F_\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t; \lambda) dt, \quad (5)$$

при этом соответствие $f \rightarrow F_\varphi$ будет унитарным отображением всего $\mathbf{B}_1$ на всё $\mathbf{L}_2(-\infty, \infty; p)$ с весом $p(\lambda) = 1 / (2 \operatorname{ch}^2 \pi \lambda)$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2} |F_\varphi(\lambda)|^2 \frac{d\lambda}{\operatorname{ch}^2 \pi \lambda}, \quad (6)$$

и будет иметь место соответствующая формула обращения.

Функции φ связаны с определенной серией функций Уиттекера $M_{n,m}(z)$ (см. (2), стр. 159), а именно: $\varphi(t; \lambda) = M_{-i\lambda, 0}(2it) / (2it)^{1/2}$. Функция $\varphi(t; \lambda)$, будучи целой функцией, является единственным регулярным решением граничной задачи

$$\frac{d}{dt} \left(t \frac{d\varphi}{dt} \right) + t\varphi + 2\lambda\varphi = 0, \quad \varphi(0; \lambda) = 1. \quad (7)$$

Если рассматривать ограничение функций $\varphi(t; \lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, на полуось $0 \leq t < \infty$ как фундаментальные функции граничной сингулярной задачи (7) на этой полуоси, то по общей теории Г. Вейля (см., например (3)) эти функции должны порождать обобщенное преобразование Фурье с некоторым спектральным весом. Действительно, оказывается, для $f \in \mathbf{L}_2(0, \infty)$ имеет определенный смысл интеграл

$$\tilde{f}_\varphi(\lambda) = \int_0^\infty f(t) \varphi(t; \lambda) dt, \quad (8)$$

и соответственно $f \rightarrow \tilde{f}_\varphi$ унитарно отображает все $\mathbf{L}_2(0, \infty)$ на всё $\mathbf{L}_2(-\infty, \infty; q)$ с весом $q(\lambda) = 1 + \operatorname{th} \pi \lambda$, так что

$$\int_0^\infty |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}_\varphi(\lambda)|^2 (1 + \operatorname{th} \pi \lambda) d\lambda, \quad (9)$$

и, стало быть, имеет место формула обращения **

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_\varphi(\lambda) \varphi(t; \lambda) (1 + \operatorname{th} \pi \lambda) d\lambda. \quad (10)$$

3. Существенно, что ограничение функций $\varphi(t; \lambda)$ на $(0, \infty)$ дает полную систему обобщенных фундаментальных функций самосопряженного оператора $\mathbf{K}$, задаваемого интегралом, стоящим в левой части (2)

* Через $\mathbf{B}_1$ обозначается подпространство всех целых функций из $\mathbf{L}_2(-\infty, \infty)$ степени ≤ 1 ; иначе, $\mathbf{B}_1$ можно определить как подпространство, на которое оператор $\mathcal{F}^{-1}$ отображает $\mathbf{L}_2(-1, 1) (\subset \mathbf{L}_2(-\infty, \infty))$.

** Разумеется, в формулах (5), (8) и (10) сходимость интегралов следует понимать в смысле сходимости в метрике соответствующего пространства $\mathbf{L}_2(-\infty, \infty; p)$, $\mathbf{L}_2(-\infty, \infty; q)$ и $\mathbf{L}_2(0, \infty)$. Авторы обязаны Г. Я. Попову указанием на то, что формулы обращения (8) и (10) известны и приведены в числе прочих (в другой записи) в (4), стр. 274.

а именно:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(t-s)}{\pi(t-s)} \varphi(s; \lambda) ds = \frac{1 - \operatorname{th} \pi \lambda}{2} \varphi(t; \lambda), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (11)$$

Это обстоятельство позволяет получить решение g уравнения (2) при любом $f \in L_2(0, \infty)$ и комплексном $-\mu \notin (0, 1)$ * по формуле

$$g(t) = \int_0^{\infty} \Gamma(t, s; -\mu) f(s) ds, \quad (12)$$

где

$$\Gamma(t, s; -\mu) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t; \lambda) \varphi(s; \lambda) (1 + \operatorname{th} \pi \lambda)}{1 - \operatorname{th} \pi \lambda + 2\mu} d\lambda. \quad (13)$$

Для самого ядра оператора K получается разложение

$$\frac{\sin(t-s)}{\pi(t-s)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(s; \lambda) \varphi(t; \lambda)}{\operatorname{ch}^2 \pi \lambda} d\lambda, \quad 0 \leq s, t < \infty. \quad (14)$$

Разложения (13) и (14) сходятся равномерно в любом конечном квадрате ($0 \leq s, t < a; a < \infty$) и сохраняют это свойство при дифференцировании по s и t любое число раз.

4. Для любого $F \in L_2(-1, 1)$ положим $\check{F}(x) = F\left(\operatorname{th} \frac{x}{2}\right) / \sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}$ ($\in L_2(-\infty, \infty)$) и $\Phi_F = \mathcal{F}(\check{F}) / \sqrt{2\pi}$. Для эрмитова $F(F(-\omega) = F(\omega))$ функция $\Phi_F(\lambda)$ будет вещественной. Так как в уравнении (2) для отправной задачи $f = \mathcal{F}^{-1}(F) \in B_1$ и стоящий в левой части интеграл также дает целую функцию из B_1 , то и решение задачи $g_\varepsilon \in B_1$. Формулы (12) и (13) позволяют получить g_ε в виде интеграла в пределах от $-\infty$ до ∞ от произведения $\Phi_F(\lambda) \varphi(t; \lambda)$ с весом $(1 - \operatorname{th} \pi \lambda) / (1 - \operatorname{th} \pi \lambda + 2\mu)$, после чего легко получается, что

$$\int_0^{\infty} g_\varepsilon^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \operatorname{th} \pi \lambda) \Phi_F^2(\lambda) d\lambda}{(1 - \operatorname{th} \pi \lambda + 2\mu)^2}. \quad (15)$$

Найдя g_ε , нетрудно уже получить соответствующее выражение для $G_\varepsilon = \mathcal{F}(g_\varepsilon)$. При подстановке $G = G_\varepsilon$ в (1) получается знак равенства и соответствующее вычисление левой части (1) приводит к соотношению

$$\frac{2\mu^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_F^2(\lambda) d\lambda}{1 - \operatorname{th} \pi \lambda + 2\mu} = \varepsilon^2, \quad (16)$$

из которого μ определяется как функция ε .

Теорема. Для того чтобы заданная функция $F \in L_2(-1, 1)$ совпадала почти всюду на $(-1, 1)$ с некоторой функцией $G_0 \in \Pi$, необходимо и достаточно, чтобы $\exp(\pi \lambda) \Phi_F(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$.

При выполнении этого условия голоморфная в нижней полуплоскости функция класса Харди $G(\xi)$ ($\xi = \omega + i\sigma$, $\sigma < 0$), граничные значения которой для $\omega \in [-1, 1]$ дают $F(\omega)$, находится по формуле

$$G(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\xi^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_F(\lambda) \exp\left(i\lambda \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}\right) d\lambda, \quad \operatorname{Im} \xi < 0. \quad (17)$$

* Сегмент $[0, 1]$ составляет весь спектр (являющийся простым и непрерывным) оператора K . Этот попутно получаемый нами факт специально доказывался в статье (5); там же указано, что он следует также из результатов статьи (6).

Фигурирующие в правой части голоморфные в нижней полуплоскости ветви $\ln [(1 + \xi) / (1 - \xi)]$ и $\sqrt{1 - \xi^2}$ выделяются условиями, что при $\xi \rightarrow \omega$, $-1 < \omega < 1$, первая стремится к вещественному, а вторая — к положительному числу.

Квадрат нормы $G_0(\omega) = G(\omega - i0)$ находится по формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_0(\omega)|^2 d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Phi_F(\lambda)|^2 d\lambda}{1 - \tanh \pi \lambda}. \quad (18)$$

Поясним, что указанный в теореме критерий эквивалентен условию конечности интеграла, стоящего в правой части (18).

Для случая, когда $F(\omega) = \overline{F(-\omega)}$ ($\in L_2(-1, 1)$), последнее условие эквивалентно конечности предела $\|g_\varepsilon\|$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

Отметим, что отправная задача этой статьи навеяна результатами статьи (7).

Если в интегральном уравнении (2) заменить верхний предел ∞ конечным числом a (> 0) и рассматривать его для функций $g, f \in L_2(0, a)$, то мы получим уравнение, теории и приложениям которого посвящена обширная литература (см. (8-10), а также заметки (11, 12)). В связи с этим уравнением была получена счетная система функций с двойной ортогональностью. В отличие от этой дискретной системы (двойственной себе в смысле преобразования Фурье) непрерывная система функций $\varphi(t; \lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, связана преобразованием Фурье с некоторой второй системой функций с двойной ортогональностью, притом уже в интервалах $(-1, 1)$ и $(-\infty, \infty)$. Этой системой является система функций $\chi_\tau(\omega)$, $-1 < \tau < 1$, соответствующим образом экстраполированных на всю ось $(-\infty < \omega < \infty)$.

Примечание при корректуре. После того, как настоящая заметка была передана в печать, авторы узнали, благодаря Д. З. Арову, о работе (13), в которой также дано решение (другим способом и в другой форме) задачи о приложении с конечного интервала функции класса Харди.

Одесский инженерно-строительный институт
Одесский электротехнический институт связи

Поступило
6 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ W. Koppelman, J. D. Pincus, Math. Zs., 71, Н. 4, 399 (1959). ² Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. II, 1934. ³ Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в спектральную теорию, «Наука», 1970.
- ⁴ Г. Бейтман, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 1, «Наука», 1965.
- ⁵ Н. J. Landau, Н. O. Pollak, Bull. Syst. Techn. J., 41, № 4 (1963). ⁶ Н. Widom, Illinois J. Math., 40, № 1, 88 (1960). ⁷ П. Я. Нудельман, Радиотехника, 26, № 9, 49 (1971). ⁸ D. Söepian, Н. O. Pollak, Bell. Syst. Techn. J., 40, № 1, 43 (1961). ⁹ Н. J. Landau, Н. O. Pollak, Bell. Syst. Techn. J., 40, № 1, 65 (1961).
- ¹⁰ Функции с двойной ортогональностью (перевод с англ.), Советское радио, М., 1971. ¹¹ П. Я. Нудельман, Радиотехника и электротехника, 4, № 2, 193 (1961).
- ¹² А. Я. Нудельман, Радиотехника и электротехника, 5, № 3, 622 (1970).
- ¹³ A. Steiner, Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A, I, Mathematica, 459, 1 (1970).