Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 3

УДК 510.1 : 517.12

МАТЕМАТИКА

А. С. КУЗИЧЕВ

ДЕДУКТИВНО-КОМБИНАТОРНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 6 VI 1972)

Работа посвящена построению и исследованию ступенчатых * конструкций комбинаторной логики с иерархией функциональностей ([2], [3]); предлагается дедуктивное разбиение оператора функциональности на уровни: введение оператора $F[n+1]$ связывается с некоторыми общими (см. ([1]) — интуиция общности) высказываниями (секвенциями) n-го уровня, $n \geqslant 0$.

I. Алфавит: $KSF\square\,(\,)\,|\Rightarrow$.

Оператор функциональности. Если a — слово длины n, $n>0$, в алфавите F, то $|a|$ считается оператором функциональности n-го уровня. Оператор функциональности n-го уровня обозначается через $F[n]$.

Переменные. Если b — непустое слово в алфавите $\square$, то $|b|$ считается переменной.

Обы. 1) K, S, оператор $F[n]$, $n>0$, и переменные считаются обами; 2) если U, T — обы, то (UT) считается обом. Обы обозначаются буквами U, T, M, X, Y (возможно с индексами); Γ, Δ — наборы (возможно пустые) графически различных обов.

n-Секвенции. Слово $\Gamma \overset{n}{\Rightarrow} U$ считается n-секвенцией, $n \geqslant 0$.

Схемы аксиом.

1. $X(KTU) \overset{n}{\Rightarrow} XT$.
2. $XT \overset{n}{\Rightarrow} X(KTU)$.
3. $X(STUM) \overset{n}{\Rightarrow} X(TM(UM))$.
4. $X(TM(UM)) \overset{n}{\Rightarrow} X(STUM)$.
5. $IT \overset{n}{\Rightarrow} T$.
6. $T \overset{n}{\Rightarrow} IT$.
7. $F[m]\,UTM,\ UX \overset{r}{\Rightarrow} T(MX)$.

Обы в аксиомах записаны в сокращенной форме, некоторые скобки опускаются при условии, что они могут быть восстановлены по принципу «скобки влево»; $I \rightleftharpoons SKK$; $n \geqslant 0$; $r \geqslant m > 0$.

Правила вывода.

1. $\dfrac{\Gamma, T, M, \Delta \overset{n}{\Rightarrow} U}{\Gamma, M, T, \Delta \overset{n}{\Rightarrow} U}$.

2. $\dfrac{\Gamma \overset{n}{\Rightarrow} U}{\Gamma, T \overset{n}{\Rightarrow} U}$.

3. $\dfrac{\Gamma \overset{n}{\Rightarrow} U;\ \Delta, U \overset{n}{\Rightarrow} T}{\Gamma, \Delta' \overset{n}{\Rightarrow} T}$.

4. $\dfrac{\Gamma, UX \overset{n}{\Rightarrow} T(MX) \text{ для любого оба } X}{\Gamma \overset{r}{\Rightarrow} F[m]\,UTM}$.

* О ступенчатых построениях математической логики см. ([1]).

В правиле 2 T — об, не имеющий вхождений в Γ; набор Δ' в правиле 3 получается из Δ вычеркиванием обов, которые входят в Γ; $n \geqslant 0$; $m > n$; $r \geqslant n$.

Комбинаторы $B, B^2, C, C_*, W, \Psi, \Phi$.

Определения:

$$B \rightleftharpoons S(KS)K, \quad B^2 \rightleftharpoons BBB, \quad C \rightleftharpoons S(BBS)(KK), \quad C_* \rightleftharpoons CI, \quad W \rightleftharpoons SS(KI),$$
$$\Psi \rightleftharpoons B(BW(BC))(BB(BB)), \quad \Phi \rightleftharpoons B(BS)B.$$

Аналогично ([4]) доказываются следующие предложения.

1. Теорема о замене. *Если $X \leftrightarrow Y$, то $T \leftrightarrow M$, где M — результат замены некоторого вхождения X в T на Y, запись вида $U \leftrightarrow T$ означает, что доказуемы секвенции $U \overset{n}{\Rightarrow} T$ и $T \overset{n}{\Rightarrow} U$ при любом $n \geqslant 0$.*

2. $BUTM \leftrightarrow U(TM)$.
3. $B^2UTMX \leftrightarrow U(TMX)$.
4. $CUTM \leftrightarrow UMT$.
5. $C_*UT \leftrightarrow TU$.
6. $WUT \leftrightarrow UTT$.
7. $\Psi UTMX \leftrightarrow U(TM)(TX)$.
8. $\Phi UTMX \leftrightarrow U(TX)(MX)$.

II. Формальная импликация $\Xi[n] \rightleftharpoons C(BCF[n])I$. Исходя из свойства B, C, I и $F[n]$, получаем:

1. $\dfrac{\Gamma, UX \overset{n}{\Rightarrow} TX \text{ для любого } X}{\Gamma \overset{r}{\Rightarrow} \Xi[m]\, UT}$, $\quad r \geqslant n \geqslant 0, \quad m > n$.

2. $[\Xi[n]\, UT, UM \overset{r}{\Rightarrow} TM]$; $r \geqslant n > 0$; выражение $[\Gamma \overset{n}{\Rightarrow} T]$ означает, что n-секвенция $\Gamma \overset{n}{\Rightarrow} T$ доказуема, $n \geqslant 0$.

Импликация $P[n] \rightleftharpoons \Psi\Xi[n]K$.

Теоремы.

1. $\dfrac{\Gamma, U \overset{n}{\Rightarrow} T}{\Gamma \overset{r}{\Rightarrow} P[m]\, UT}$, $\quad r \geqslant n \geqslant 0, \quad m > n$.

2. $[P[n]\, UT, U \overset{r}{\Rightarrow} T]$, $\quad r \geqslant n > 0$.

III. Конъюнкция $\&[n,k] \rightleftharpoons B^2(C\Xi[k]I)(\Psi BP[n])$. Следующие три теоремы выражают, по существу, правила введения и удаления конъюнкции.

1. $[U, T \overset{r}{\Rightarrow} \&[n,k]\, UT]$, $\quad k > n > 0, \quad r \geqslant n$.

2. $[\&[n,k]\, UT \overset{r}{\Rightarrow} U]$; 3. $[\&[n,k]\, UT \overset{r}{\Rightarrow} T]$; $\quad r \geqslant k > 0, \quad n > 0$.

IV. Дизъюнкция $\bigvee[n,k,r,m] \rightleftharpoons B^2(C\Xi[m]I)(\Psi(\Phi\,\&[k,r])P[n])$.

Свойства дизъюнкции: 1. $[U \overset{s}{\Rightarrow} \bigvee UT]$; $\quad$ 2. $[T \overset{s}{\Rightarrow} \bigvee UT]$;

$$\bigvee \rightleftharpoons \bigvee[n,k,r,m]; n,k,r > 0; \quad s \geqslant \max(n,r); \quad m > \max(n,r).$$

3. $\dfrac{\Gamma, U \overset{s}{\Rightarrow} M; \ \Gamma, T \overset{l}{\Rightarrow} M}{\Gamma, \bigvee UT \overset{i}{\Rightarrow} M}$; $\quad s, l \geqslant 0; \quad k, m > 0; \quad r > k; \quad n > \max(s,l)$; $i \geqslant \max(s,l,k,m)$.

V. Равенство $Q[n] \rightleftharpoons \Psi\Xi[n]C_*$.

Теоремы: 1. $[Q[n]\, UT, \ XU \overset{r}{\Rightarrow} XT]$, $\quad r \geqslant n > 0$.

2. $\dfrac{\Gamma, XU \overset{m}{\Rightarrow} XT \text{ для любого } X}{\Gamma \overset{r}{\Rightarrow} Q[n]\, UT}$; $\quad n > m \geqslant 0, \quad r \geqslant m$.

3. $[Q[n]\,UT \overset{r}{\Rightarrow} Q\,[m]\,TU]$, $r \geqslant n > 0$, $m > 0$.

4. $[Q[n]\,UT, Q[m]\,TM \overset{r}{\Rightarrow} Q\,[n]\,UM]$, $r \geqslant m > 0$, $n > 0$.

5. $[Q[n]\,UM \overset{r}{\Rightarrow} Q\,[m]\,(TU)(TM)]$; 6. $[Q[n]\,UM \overset{r}{\Rightarrow} Q\,[m]\,(UT)(MT)]$; $m > n > 0$; $r \geqslant n$.

VI. Квантор общности $\Pi[n, m] \rightleftharpoons \Xi[m](WQ[n])$. Нетрудно доказать:

1. $\dfrac{\Gamma \overset{r}{\Rightarrow} UX \text{ для любого } X}{\Gamma \overset{l}{\Rightarrow} \Pi\,[n, m]\,U}$, $m > r \geqslant 0$, $l \geqslant r$, $n > 0$.

2. $[\Pi\,[n, m]\,U \overset{r}{\Rightarrow} UT]$, $r \geqslant m > 0$, $n > 0$.

3. $[\Pi\,[n, m]\,(B^2(CP\,[r]\,T)\,P\,[k]\,T) \overset{l}{\Rightarrow} T]$; $n, m, r, k > 0$; $l \geqslant \max(m, r)$.

VII. Отрицание $\urcorner[n, k, m] \rightleftharpoons CP[m] \bigwedge [n, k]$, где $\bigwedge[n, k] \rightleftharpoons \Pi[n, k]I$.

Теоремы. 1. $\dfrac{\Gamma \overset{r}{\Rightarrow} X \text{ для любого } X}{\Gamma \overset{l}{\Rightarrow} \bigwedge\,[n, k]}$, $k > r \geqslant 0$, $l \geqslant r$, $n > 0$.

2. $[\bigwedge\,[n, k] \overset{r}{\Rightarrow} T]$, $r \geqslant k > 0$, $n > 0$.

3. $[\urcorner\,[n, k, m]\,T, T \overset{r}{\Rightarrow} X]$; $n, m, k > 0$; $r \geqslant \max(m, k)$.

4. $\dfrac{\Gamma, U \overset{r}{\Rightarrow} T;\ \Gamma, U \overset{r}{\Rightarrow} \urcorner\,[n, k, m]\,T}{\Gamma \overset{l}{\Rightarrow} \urcorner\,[n, k, q]\,U}$; $n, k, m > 0$; $q > r \geqslant m$; $l \geqslant r$.

VIII. Аналогично ([4]) доказывается

Принцип комбинаторной полноты. *Для всякого оба U существует об $\{x_1, \ldots, x_m\}U$, не содержащий вхождений переменных* $x_1, \ldots, x_m$, $m > 0$, *и такой, что для любых обов* $T_1, \ldots, T_m$

$$\{x_1, \ldots, x_m\}UT_1 \ldots T_m \leftrightarrow [T_1, \ldots, T_m / x_1, \ldots, x_m]U,$$

где $[T_1, \ldots, T_m / x_1, \ldots, x_m]U$ — *результат одновременной подстановки* $T_1, \ldots, T_m$ *в об U вместо соответствующих вхождений* $x_1, \ldots, x_m$.

IX. Квантор существования.

$$\exists^*[n, m] \rightleftharpoons B(W(B^2(\Phi P[m])C\Xi[n]))K;$$

$$\exists[n, m, T] \rightleftharpoons \exists^*[n, m]T; \quad \exists[n, m] \rightleftharpoons \exists[n, m, I].$$

Определение. Секвенция $\Gamma, U \overset{n}{\Rightarrow} T$ считается независимой от вхождения переменной x в U, если для любого оба Y имеем $[\Gamma, [Y/x]\,U \overset{n}{\Rightarrow} T]$ тогда и только тогда, когда $[\Gamma, U \overset{n}{\Rightarrow} T]$, $n \geqslant 0$.

Учитывая принцип комбинаторной полноты, свойства комбинаторов K, C, Φ, B^2, W, B и операторов $\Xi[n]$, $P[m]$, выводим:

1. $\exists^*[n, m]TU \leftrightarrow P[m](\Xi[n]U(KT))T$.

2. $[[T/x]\,U \overset{a}{\Rightarrow} \exists\,[n, m]\,\{x\}\,U]$, $a \geqslant n > 0$, $m > n$.

3. *Пусть* $\Gamma, U \overset{l}{\Rightarrow} T$ — *независимая от вхождений x в U секвенция*, $l \geqslant 0$. *Тогда*

$$\frac{\Gamma, U \overset{l}{\Rightarrow} T}{\Gamma, \exists\,[n, m, T]\,\{x\}\,U \overset{a}{\Rightarrow} T}, \quad n > l, \quad m > 0, \quad a \geqslant \max(l, m).$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Марков, Вестн. Московск. унив., матем., механ., № 2, 7 (1970). [2] А. С. Кузичев, ДАН, 198, № 4, 759 (1971). [3] А. С. Кузичев, Комбинаторный анализ, в. 1, 105 (1971). [4] H. B. Curry, R. Feys, Combinatory logic, Amsterdam, 1958.