Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 3

УДК 517.91 МАТЕМАТИКА

Л. М. ЛЕРМАН, Л. П. ШИЛЬНИКОВ

О КЛАССИФИКАЦИИ ГРУБЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ЯЧЕЕК

(Представлено академиком И. Г. Петровским 1 VI 1972)

Одной из основных задач качественной теории дифференциальных уравнений является выяснение основных элементов, определяющих структуру разбиения фазового пространства на траектории. Для двумерных систем на плоскости эта задача была полностью решена в работах А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина, Е. А. Леонтович и А. Г. Майера. В грубом случае ([1]) такими элементами являлись траектории, неустойчивые по Ляпунову, а в общем — орбитно-неустойчивые. На основе понятия орбитно-неустойчивой траектории Е. А. Леонтович и А. Г. Майер указали схему — полный топологический инвариант двумерных систем. В общем случае многомерных систем эта задача не решена до сих пор. Эта задача не решена и для неавтономных систем второго порядка, хотя на необходимость ее решения, а также распространения идеи грубости на неавтономные системы указывали А. А. Андронов и Е. А. Леонтович (см. ([2])).

В настоящей работе эта задача решается для одного класса неавтономных систем. В основе наших рассуждений лежит важное понятие особого решения, роль которого во многом аналогична состояниям равновесия автономных систем и периодическим движениям систем с правой частью, периодически зависящей от времени (об особых траекториях автономных систем см. ([3])).

Определение 1. Неавтономной динамической системой (н.д.с.) φ_τ^t на C^∞ гладком компактном многообразии M без края называется непрерывное двухпараметрическое семейство C^r-диффеоморфизмов ($r \geqslant 1$) многообразия M, удовлетворяющее свойствам:

1) $\varphi_t^t = \mathrm{id}$ — тождественное отображение, 2) $\varphi_\tau^t \circ \varphi_s^\tau = \varphi_s^t$ (свойство суперпозиции), 3) при фиксированном τ отображение $R^1 \times M \to M$, порожденное φ_τ^t, есть C^s-отображение, $1 \leqslant s \leqslant r$.

Пусть τ фиксировано. Тогда можно определить векторное поле $X_\tau(x) = \frac{d}{dt}[\varphi_\tau^t(x)]|_{t=\tau}$. Получаем (по меньшей мере непрерывное) однопараметрическое семейство C^r векторных полей на M. Будем называть его неавтономным векторным полем (верно и обратное: на компактном M каждому неавтономному векторному полю соответствует н.д.с.). Считая, что в пространстве векторных полей на M введена C^r-норма $|\cdot|$, множество неавтономных векторных полей (н.в.п.) можно сделать метрическим (и даже банаховым) пространством, вводя метрику между такими полями X_t, Y_t по формуле $l(X_t, Y_t) = \sup|X_t - Y_t|$, sup берется по $t \in R^1$. Ниже будем считать, что все н.в.п. X_t ограничены, т. е. $l(X_t, 0) \leqslant K$, $K > 0$.

Будем рассматривать н.д.с. в фазовом пространстве $R^1 \times M$. Через каждую точку (τ, x) этого пространства проходит единственная гладкая кривая $(t, \varphi_\tau^t(x))$, которую будем называть решением н.д.с., проходящим через (τ, x). Часто будем φ_τ^t рассматривать как диффеоморфизм $M_\tau \to M_t$, $M_t = \{t\} \times M$.

Определение 2. Н.д.с. X, X' эквивалентны, если существует эквиморфизм* h: $R^1 \times M \to R^1 \times M$, переводящий решения системы X в решения системы X', причем каждое M_t инвариантно относительно t.

Определение 3. Н.д.с. X называется грубой, если существует $\sigma > 0$, что любое н.в.п. Y_t из σ-окрестности векторного поля X_t, соответствующего X, порождает систему, эквивалентную X.

Пусть H_t — множество эквиморфизмов $R^1 \times M$, для которых каждое M_t инвариантно. В H_t введем метрику

$$\rho(h, h_1) = \sup_{t \in R} \max_{x \in M} [d(h(t, x), h_1(t, x)) + d(h^{-1}(t, x), h_1^{-1}(t, x))],$$

где $h(t, \cdot)$ — эквиморфизм $M_t \to M_t$, полученный из $h \in H_t$ при фиксированном t, $d(\cdot, \cdot)$ — метрика на M, порожденная римановой метрикой.

В метрике ρ H_t — топологическая группа. Если X — н.д.с., то через H_t^X обозначим замкнутую подгруппу эквиморфизмов из H_t, которые переводят решения системы X в решения системы X.

Определение 4. Решение Γ н.д.с. X называется особым, если существует такое $\varepsilon > 0$, что все $h \in H_t^X$, для которых $\rho(h, \mathrm{id}) < \varepsilon$, оставляют Γ неподвижным.

Выделим один важный класс особых решений.

Определение 5. Решение $\varphi_\tau^t(x)$ н.д.с. X на M называется гиперболическим (h-решением), если касательное пространство TM_t в каждой точке $\varphi_\tau^t(x)$ разлагается в прямую сумму $E_t^s \oplus E_t^u$, инвариантную относительно дифференциала $T\varphi_\tau^t$ ($T\varphi_\tau^t(\xi) \in E_t^s$, если $\xi \in E_\tau^s$, $T\varphi_\tau^t(\eta) \in E_t^u$, если $\eta \in E_\tau^u$), и при некоторых положительных C, C', λ, γ выполнены оценки (в некоторой римановой метрике)

$$\| T\varphi_\tau^t(\xi) \| \leqslant C e^{-\lambda(t-\tau)} \| \xi \|, \quad t \geqslant \tau, \quad \xi \in E_\tau^s;$$
$$\| T\varphi_\tau^t(\eta) \| \geqslant C' e^{\gamma(t-\tau)} \| \eta \|, \quad t \geqslant \tau, \quad \eta \in E_\tau^u.$$

Для линейной системы это совпадает с понятием экспоненциальной дихотомии (см. ([5], [6])).

Для h-решения в некоторой его цилиндрической окрестности в $R^1 \times M$ (т. е. окрестности, эквиморфной $R^1 \times D$, D — n-мерный диск) можно доказать существование C^1-гладких локальных устойчивого и неустойчивого многообразий $W^s_{\text{лок}}$ и $W^u_{\text{лок}}$ (см. ([3], [4])) и затем обычными методами, как и в автономном случае, продолжить их до глобального устойчивого и неустойчивого многообразий W^s, W^u ([7], [8]).

Эти многообразия являются взаимно однозначными послойными C^r-вложениями $R^1 \times R^p$, $R^1 \times R^q$, $p + q = n = \dim M$ (т. е. вложениями на каждом слое $\{t_0\} \times R^p$, $\{t_0\} \times R^q$), которые гладко зависят от t_0 в C^1 топологии на компактных множествах. Индексом h-решения будем называть $p = \dim W^s - 1$. В крайних случаях устойчивости ($p = n$) или неустойчивости ($p = 0$) неустойчивым (соответственно устойчивым) многообразием будем считать само Γ.

Пусть два h-решения одного индекса асимптотически сближаются при возрастании t, т. е. $d(\varphi_\tau^t(x), \varphi_\tau^t(x')) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда, в силу свойств устойчивого многообразия, устойчивые многообразия этих h-решений совпадают как множества и поэтому можно говорить об их общем устойчивом многообразии.

Определение 6. Множество h-решений одного индекса, имеющих общее устойчивое (неустойчивое) многообразие, называется положительным (отрицательным) пучком h-решений, а их общее устойчивое (неустойчивое) многообразие называется устойчивым (неустойчивым) многообразием пучка.

---

* Эквиморфизмом метрического пространства A с метрикой $\rho(\cdot, \cdot)$ называется такой гомеоморфизм h: $A \to A$, для которого h, h^{-1} являются равномерными гомеоморфизмами (см. ([4])).

Из определения ясно, что каждое h-решение принадлежит некоторому положительному пучку h-решений, а также некоторому отрицательному пучку h-решений.

Определение 7. Решения Γ_1, Γ_2 н.д.с. X эквивалентны, если по любому $\varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon) \in Z$ и $h_i \in H_t^X$, $i = 1, 2, \ldots, n(\varepsilon)$, что $h_{n(\varepsilon)} \circ h_{n(\varepsilon)-1} \circ \ldots \circ h_1(\Gamma_1) = \Gamma_2$ и $\rho(h_i, \mathrm{id}) < \varepsilon$.

Класс эквивалентности решений будем называть ячейкой. В частности, из определения 7 следует, что каждое особое решение является ячейкой. Простейшим типом систем с этой точки зрения будут системы с конечным числом ячеек. Системы класса G, к изучению которых мы переходим, обладают таким свойством. Эти системы удовлетворяют следующим геометрическим ограничениям:

1) Конечное число ячеек.

2) Все особые решения являются гиперболическими.

3) Устойчивые и неустойчивые многообразия пучков пересекаются трансверсально, в том числе и в бесконечности *.

4) Всякое неособое решение лежит в пересечении устойчивого многообразия некоторого положительного пучка h-решений и неустойчивого многообразия некоторого отрицательного пучка h-решений.

5) Для каждого h-решения Γ_i выберем произвольно его цилиндрическую окрестность U_i. Пусть $U = \bigcup\limits_i U_i$. Если $(\tau, x) \in (R^1 \times M) \setminus U$ и $\varphi_\tau^t(x)$ — решение, то существуют t_1, t_2, $t_1 < t < t_2$ такие, что $\varphi_\tau^{t_i}(x) \in \overline{U}$, а $\varphi_\tau^t(x) \notin U$, $t \in (t_1, t_2)$. Тогда условие 5 состоит в том, что $|t_1 - t_2|$ ограничено для всех таких решений (граница, конечно, зависит от U) **.

Примером системы класса G на M является грубая градиентная система на M, рассматриваемая как неавтономная в $R^1 \times M$, а также ее малое неавтономное возмущение.

Изучим теперь систему класса G на M^2.

Теорема 1. *Система класса G на M^2 груба.*

В частности, для систем с почти периодическим неавтономным векторным полем имеет место следующая

Теорема 2. *Если система класса G на M^2 почти периодична, то все особые решения почти периодические и система эквивалентна грубой автономной системе на M^2 без периодических движений, рассматриваемой как неавтономная в $R^1 \times M$.*

В случае $h = 2$ h-решения могут быть только трех типов: устойчивые $(p = 2)$, седловые $(p = 1)$ и неустойчивые $(p = 0)$. На M_t^2 следы устойчивых (неустойчивых) многообразий пучков будут одномерными гладкими кривыми, примыкающими к следам неустойчивых (устойчивых) h-решений. Построим разбиение M_t^2 на клетки: 0-мерные клетки — следы неустойчивых h-решений, 1-мерные клетки — следы устойчивых многообразий положительных пучков седловых решений, 2-мерные клетки — следы устойчивых многообразий устойчивых пучков.

Верна следующая

Теорема 3. *Построенное разбиение является клеточным комплексом и верны неравенства Морса*

$$R_0 \geqslant b_0, \quad R_1 - R_0 \geqslant b_1 - b_0, \quad R_2 - R_1 + R_0 = b_2 - b_1 + b_0 = \chi(M^2),$$

---

* Это означает, что многообразия не могут неограниченно сближаться при $t \to +\infty\,(-\infty)$ не пересекаясь.

** Замечание. Условие 5 существенно для доказательства грубости систем класса G, так как при невыполнении его у возмущенной системы могут появляться новые особые решения. В качестве примера можно рассмотреть н.д.с., порождаемую уравнением на $[-1, 1]$:

$$\dot{x} = (1 - x)(1 + x)[x^2 + 0{,}5(1 - x^2)\exp(-t^2) - \mu].$$

При $\mu = 0$ у нее два особых h-решения $x \equiv 1$ и $x \equiv -1$. При $\mu = 0$ появляются еще два особых решения.

где R_i — число положительных пучков индекса i, $b_i = \operatorname{rang} H^i(M^2, R)$, $\chi(M^2)$ — эйлерова характеристика M^2.

Отметим, что если в случае автономной системы каждому устойчивому многообразию соответствует стационарная точка системы или периодическая орбита ([9]), то здесь такого соответствия нет, здесь основную роль играют именно пучки h-решений, причем число положительных пучков может быть не равно числу отрицательных. Введем некоторый инвариант — диаграмму системы. Зафиксируем M_t. Следы всех h-решений вместе со следами устойчивых и неустойчивых многообразий пучков образуют некоторый связный граф, вложенный в M_t^2 (исключением является система, эквивалентная потоку северный полюс — южный полюс на S^2). Два таких вложенных графа будем считать эквивалентными, если существует гомеоморфизм M_t^2, переводящий один граф в другой с сохранением типа вершин (устойчивые, неустойчивые, седловые). Класс эквивалентности таких графов, в котором содержится граф, полученный для данной системы на M_t^2, будем называть диаграммой системы. Это определение не зависит от выбора t.

Теорема 4. *Для того чтобы две системы класса G на M^2 были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их диаграммы были одинаковыми.*

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
29 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, ДАН, 14, № 5 (1937). [2] Е. А. Леонтович-Андронова, III Всесоюзн. матем. съезд, 3, 1958. [3] В. С. Афраймович, Л. П. Шильников, УМН, 27, в. 3 (1972). [4] В. А. Ефремович, УМН, 8, в. 5 (1953). [5] Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер, Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, М., 1970. [6] Ю. А. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., 1970. [7] Д. В. Аносов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 90 (1967). [8] S. Smale, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. III, 17 (1963). [9] S. Smale, Bull. Am. Math. Soc., 66, 43 (1960).