АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ОПТИКА
И
СПЕКТРОСКОПИЯ

ТОМ XV

ВЫПУСК
6

ДЕКАБРЬ 1963

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА ОПТИЧЕСКИ АКТИВНЫМИ КРИСТАЛЛАМИ

Б. В. Бокуть и *Ф. И. Федоров*

В общем виде решена задача об отражении и преломлении плоских электромагнитных волн на поверхности произвольно ориентированного прозрачного оптически активного кристалла любой симметрии при наклонном и нормальном падении. Результаты применены к кристаллам инверсионно-планального класса тетрагональной сингонии.

До настоящего времени свойства оптически активных кристаллов мало исследованы. В первую очередь это относится к изучению свойств света, отраженного от активного кристалла и прошедшего через плоскопараллельную пластинку, а также к вопросам, связанным с определением параметров оптической активности кристаллов. Дело в том, что явление оптической активности в кристаллах является более сложным, чем свойства обычного двупреломления или дихроизма, и решение граничной задачи при использовании координатного метода связано с математическими затруднениями. Некоторые сведения о волне, отраженной от активной изотропной среды и одноосного кристалла, содержатся в работах Фойгта и Форстерлинга (см., например, [1, 2]).

В данной работе решается задача об отражении и преломлении плоских электромагнитных волн на поверхности произвольно ориентированного прозрачного оптически активного немагнитного кристалла любой симметрии, граничащего с неактивной прозрачной изотропной средой, показатель преломления которой n.

В обычном координатном изложении даже приближенная теория свойств оптически активных кристаллов связаны с довольно громоздкими и запутанными выкладками [3]. Мы получим здесь соответствующие результаты в ковариантной форме. Исходные уравнения Масквелла для плоских электромагнитных волн в оптически активных средах могут быть записаны в виде

$$\mathbf{D} = \varepsilon'\mathbf{E} = -[\mathbf{mH}], \quad \mathbf{H} = [\mathbf{mE}], \tag{1}$$

причем

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\mathbf{g}^{\times}, \quad \mathbf{g} = k_0\alpha\mathbf{m}, \quad \mathbf{m} = n\mathbf{n}. \tag{2}$$

Здесь ε — тензор диэлектрической проницаемости; α — электрический тензор оптической активности [4], $\mathbf{m}$ — вектор рефракции; k_0 — волновое число для вакуума; n — показатель преломления; $\mathbf{n}$ — волновая нормаль. Магнитных свойств среды мы не учитываем. Исключая из (1) $\mathbf{E}$, получим [5]

$$\mathbf{n}^{\times}\varepsilon'^{-1}\mathbf{n}^{\times}\mathbf{H} = -\frac{1}{n^2}\mathbf{H}. \tag{3}$$

Приближение, которым обычно ограничиваются в теории оптически активных кристаллов, заключается в пренебрежении квадратами компонент тензора α (или $\mathbf{g}$), а также их произведениями на анизотропию тензора ε. Последнее означает, что в членах, содержащих α, можно рассматривать ε как скалярный тензор

$$\varepsilon \approx \frac{1}{3}\varepsilon_c = \bar{n}^2 \tag{4}$$

(ε_c — след тензора ε, $\bar{n}$ — средний показатель преломления кристалла). В этом приближении

$$\varepsilon^{-1} = [\varepsilon(1 + i\varepsilon^{-1}\mathbf{g}^{\times})]^{-1} = \varepsilon^{-1} - i\varepsilon^{-1}\mathbf{g}^{\times}\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{-1} - \frac{i}{\bar{n}^4}\mathbf{g}^{\times}. \tag{5}$$

Подставляя (5) в (3) и учитывая свойства антисимметричных тензоров $\mathbf{n}^{\times}$, $\mathbf{g}^{\times}$ [5], получим основное уравнение приближенной теории оптической активности в ковариантной форме

$$S\mathbf{H} = \left(\mathbf{n}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{n}^{\times} + i\frac{\mathbf{ng}}{\bar{n}^4}\mathbf{n}^{\times}\right)\mathbf{H} = -\frac{1}{n^2}\mathbf{H}. \tag{6}$$

Это уравнение отличается от соответствующего уравнения для неактивных кристаллов только за счет второго члена в скобках, содержащего вектор $\mathbf{g}$. Скалярное произведение $g = \mathbf{ng}$, пропорциональное величине $\mathbf{n}\alpha\mathbf{n}$, носит название скалярного параметра гирации. Так как тензор S эрмитов, то вследствие известных общих свойств собственных векторов эрмитовых матриц имеем

$$\mathbf{H}_{\pm}^{\times}\mathbf{H}_{\mp} = 0, \tag{7}$$

где $\mathbf{H}_{\pm}$ — решения уравнения (6), отвечающие собственным значениям $-\frac{1}{n_{\pm}^2}$. Условие (7) означает (см., например, [5]), что эллипсы $\mathbf{H}_+$ и $\mathbf{H}_-$ одинаковы по форме, ориентированы взаимно-перпендикулярно и обходятся в противоположных направлениях. Чтобы найти точное решение приближенного уравнения (6), используем векторы $\mathbf{h}_{\pm}^0$, являющиеся решениями соответствующей задачи для такого же кристалла, лишенного оптической активности (т. е. для $\alpha = 0$)

$$\mathbf{n}^{\times}\varepsilon^{-1}\mathbf{n}^{\times}\mathbf{h}_{\pm}^0 = -\frac{1}{n_{\pm}^{0\,2}}\mathbf{h}_{\pm}^0, \tag{8}$$

причем

$$\mathbf{h}_{\pm}^0 = C_{\pm}\left(\frac{[\mathbf{m}_{\pm}^0\mathbf{c}']}{|[\mathbf{m}_{\pm}^0\mathbf{c}']|} \pm \frac{[\mathbf{m}_{\pm}^0\mathbf{c}'']}{|[\mathbf{m}_{\pm}^0\mathbf{c}'']|}\right), \quad \mathbf{h}_{\pm}^{0\,2} = 1, \quad [\mathbf{nh}_{\pm}^0] = \pm\mathbf{h}_{\mp}^0. \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}''$ — единичные векторы бинормалей [5]; $\mathbf{m}_{\pm}^0$ — векторы рефракции в неактивном кристалле. Поскольку $\mathbf{nH} = \mathbf{nh}_{\pm}^0 = 0$ [см. (3), (8)], то можно написать следующее разложение для $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H} = a'\mathbf{h}_+^0 + a''\mathbf{h}_-^0. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (6), учитывая (8), (9) и умножая на $\mathbf{h}_{\pm}^0$, найдем в принятом приближении $\left(n^2 - n_+^{0\,2}\right)a' + iga'' = 0$, $iga' - \left(n^2 - n_-^{0\,2}\right)a'' = 0$, или, вводя обозначения

$$n_0^2 = \frac{1}{2}\left(n_+^{0\,2} + n_-^{0\,2}\right), \quad \Delta = n^2 - n_0^2, \quad \delta = \frac{1}{2}\left(n_+^{0\,2} - n_-^{0\,2}\right), \tag{11}$$

получим отсюда

$$(\Delta - \delta)a' + iga'' = 0, \quad iga' - (\Delta + \delta)a'' = 0. \tag{12}$$

Следовательно, $\Delta^2 = \delta^2 + g^2$ и

$$n^2 = n_{\pm}^2 = n_0^2 \pm \sqrt{\delta^2 + g^2}. \tag{13}$$

Соответственно, для отношения $\frac{a''}{a'}$ имеем

$$\left(\frac{a''}{a'}\right)_{\pm} = \frac{\delta \mp \sqrt{\delta^2 + g^2}}{ig} = \frac{ig}{\delta \pm \sqrt{\delta^2 + g^2}}. \tag{14}$$

В результате из (10) следует

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\pm} = A_{\pm}\mathbf{h}_{\pm}, \quad \mathbf{h}_{\pm} = \mathbf{h}_{\pm}^0 + \frac{ig}{\delta + \sqrt{\delta^2 + g^2}}\mathbf{h}_{\mp}^0. \tag{15}$$

Таким образом, обе волны $\mathbf{H}_{\pm}$ эллиптически поляризованы, причем большая ось эллипса совпадает с направлением вектора, соответствующего отсутствию оптической активности $\mathbf{h}_{\pm}^0$. Эллиптичность γ (т. е. отношение полуосей эллипса) равна

$$\gamma = \frac{b}{a} = \frac{g}{\delta + \sqrt{\delta^2 + g^2}} = \frac{\varkappa}{1 + \sqrt{1 + \varkappa^2}}, \quad \varkappa = \frac{g}{\delta} = \frac{2k_0\mathbf{n}\alpha\mathbf{n}\bar{n}}{n_+^{0\,2} - n_-^{0\,2}}. \tag{16}$$

Как видим, эллиптичность определяется одним параметром $\varkappa$. Из (16) следует, что при $\varkappa = 0$ ($g = 0$, $\delta \neq 0$) получается линейная поляризация. В случае $\varkappa = \infty$ имеем $\gamma = \frac{b}{a} = 1$, т. е. круговую поляризацию. При этом должно быть $g \neq 0$ и $\delta = \frac{1}{2}\left(n_+^{0\,2} - n_-^{0\,2}\right) = 0$, что соответствует оптической оси. Возможен еще случай $\varkappa = \delta = 0$, $\frac{b}{a} = \gamma = \frac{0}{0}$, он также соответствует оптической оси, но при этом поляризация является произвольной, аналогично тому как это имеет место в прозрачных неактивных кристаллах вдоль оптической оси.

Определив векторы магнитного поля в активном кристалле (15), из (1) получаем выражения для векторов электрического поля

$$\mathbf{E}_{\pm} = A_{\pm}\mathbf{e}_{\pm}, \quad \mathbf{e}_{\pm} = \left(\frac{n_{\pm}}{n_{\pm}^0} - \frac{i}{\bar{n}^2}\mathbf{g}^{\times}\right)\left(\mathbf{e}_{\pm}^0 + i\gamma\frac{n_{\pm}^0}{n_{\mp}^0}\mathbf{e}_{\mp}^0\right). \tag{17}$$

В [3] векторы $\mathbf{e}_{\pm}$ записаны в виде $\mathbf{e}_{\pm} = e_{\pm}^0 + i\gamma\mathbf{e}_{\mp}^0$. Сравнивая с (17), мы видим, что в принятом приближении выражение, приведенное в [3], является неверным. Это связано с тем, что в выражениях, определяющих ориентацию векторов электрической индукции $\mathbf{d}_{\pm} = \mathbf{d}_{\pm}^0 + i\gamma\mathbf{d}_{\mp}^0$ (см. (1), (15), (16) в [3]) принимается $\mathbf{e}_{\pm} = \frac{1}{\bar{n}^2}\mathbf{d}_{\pm}$, что не соответствует выбранному приближению, поскольку $\varepsilon \approx \bar{n}^2$ только в членах, содержащих малые параметры оптической активности.

Как показано в [5], векторы рефракции отраженных и преломленных волн на поверхности любой среды всегда могут быть представлены в виде

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{b} + \eta_k\mathbf{q}, \tag{18}$$

где $\mathbf{m}_k = n_k\mathbf{n}_k$ — вектор рефракции отраженной или преломленной волны; n_k — соответствующий показатель преломления; $\mathbf{n}_k$ — единичный вектор волновой нормали; $\mathbf{q}$ — единичный вектор нормали к отражающей поверхности, направленный в активный кристалл; $\mathbf{b} = [\mathbf{qa}]$; $\mathbf{a} = [\mathbf{m}_k\mathbf{q}]$, а $\eta_k = \mathbf{m}_k\mathbf{q}$ — параметры, которые определяются из уравнения нормалей. Согласно [5], вектор рефракции отраженной волны $\mathbf{m}'$ равен: $\mathbf{m}' = \mathbf{b} - \eta\mathbf{q}$, так как $\eta' = -\eta$, где $\eta = \mathbf{mq}$ относится к падающей волне.

Векторы рефракции обеих преломленных волн, обозначаемые в дальнейшем $\mathbf{m}_{\pm}$, должны удовлетворять уравнению нормалей для оптически активных кристаллов [6], которое можно записать в виде

$$\mathbf{m}_{\pm}^2\mathbf{m}_{\pm}\varepsilon\mathbf{m}_{\pm} - \mathbf{m}_{\pm}(\bar{\varepsilon}_c - \bar{\varepsilon})\mathbf{m}_{\pm} + |\varepsilon| - (\mathbf{m}_{\pm}\mathbf{g})^2 = 0, \tag{19}$$

где $|\varepsilon|$, $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\varepsilon}_c$ — определитель ε, тензор, взаимный к ε, и его след, соответственно.

Подставляя (18) в (19), получим уравнение для определения $\eta_\pm$

$$\mathscr{A}_1\eta_\pm^4+\mathscr{B}_1\eta_\pm^3+\mathscr{C}_1\eta_\pm^2+\mathscr{D}_1\eta_\pm+\mathscr{E}_1=0. \tag{20}$$

Здесь введены обозначения

$$\left.\begin{aligned}
&\mathscr{A}_1=\mathbf{q}\varepsilon\mathbf{q}-k_0^2(\mathbf{q}\alpha\mathbf{q})^2,\quad \mathscr{B}_1=2\mathbf{b}\varepsilon\mathbf{q}-2k_0^2\mathbf{q}\alpha\mathbf{q}\cdot(\mathbf{b}\alpha\mathbf{q}+\mathbf{q}\alpha\mathbf{b}),\\
&\mathscr{C}_1=\mathbf{b}\varepsilon\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot{}^2\mathbf{q}\varepsilon\mathbf{q}-\mathbf{q}(\bar{\varepsilon}_c-\bar{\varepsilon})\mathbf{q}-k_0^2[(\mathbf{q}\alpha\mathbf{b}+\mathbf{b}\alpha\mathbf{q})^2+2\mathbf{b}\alpha\mathbf{b}\cdot\mathbf{q}\alpha\mathbf{q}],\\
&\mathscr{D}_1=2\mathbf{a}\cdot{}^2\mathbf{b}\varepsilon\mathbf{q}+2\mathbf{q}\varepsilon\mathbf{b}-2k_0^2\mathbf{b}\alpha\mathbf{b}\cdot(\mathbf{q}\alpha\mathbf{b}+\mathbf{b}\alpha\mathbf{q}),\\
&\mathscr{E}_1=\mathbf{a}\cdot{}^2\mathbf{b}\varepsilon\mathbf{b}-\mathbf{b}(\bar{\varepsilon}_c-\bar{\varepsilon})\mathbf{b}+|\varepsilon|-k_0^2(\mathbf{b}\alpha\mathbf{b})^2.
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Определив параметры $\eta_\pm$, согласно (18) мы сразу получим векторы рефракции преломленных волн $\mathbf{m}_\pm$.

Зная векторы рефракции преломленных волн (18), (20), (21) и общие выражения для направления векторов электрического и магнитного полей в активных кристаллах (15), (17), можно решить граничную задачу для этих сред. Проще всего для этой цели использовать результаты работы [7], где в общем виде решена задача об отражении и преломлении света на поверхности прозрачных неактивных немагнитных кристаллов, причем не сделано никаких предположений относительно симметрии и вещественности тензора ε. Поэтому результаты, полученные в [7], справедливы и для эрмитовского тензора диэлектрической проницаемости $\varepsilon+i\mathbf{g}^*$, который описывает свойства оптически активных кристаллов.

Исходя, как в [5], из выражений для падающей волны в виде

$$\mathbf{E}=A\mathbf{a}+b[\mathbf{na}],\quad \mathbf{H}=n(A[\mathbf{na}]-B\mathbf{a}), \tag{22}$$

получим для амплитудных множителей отраженной A', B' и преломленных $A_\pm$ волн следующие выражения [7]

$$\left.\begin{aligned}
&A'=\frac{A\eta(\mathbf{aF}\cdot{}_+\mathbf{bF}'_--\mathbf{aF}\cdot{}_-\mathbf{bF}'_+)+{}'Bn(\mathbf{aF}\cdot{}_-\mathbf{aF}'_+-\mathbf{aF}\cdot{}_+\mathbf{aF}'_-)}{\eta\mathbf{a}^2\cdot\mathbf{q}[\mathbf{F}'_+\mathbf{F}'_-]},\\
&B'=\frac{A\eta(\mathbf{bF}\cdot{}_-\mathbf{bF}'_+-\mathbf{bF}\cdot{}_+\mathbf{bF}'_-)+Bn(\mathbf{bF}\cdot{}_+\mathbf{aF}'_--\mathbf{bF}\cdot{}_-\mathbf{aF}'_+)}{n\mathbf{a}^2\mathbf{q}[\mathbf{F}'_+\mathbf{F}'_-]},\\
&A_\pm=\frac{2\eta}{n^2}\,\frac{A\eta\mathbf{bF}'_\mp-Bn\mathbf{aF}'_\mp}{\mathbf{q}[\mathbf{F}'_\pm\mathbf{F}'_\mp]},
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{aF}_\pm=-\frac{\eta}{n^2}(\eta-\eta_\pm)'\mathbf{qh}_\pm,\quad \mathbf{aF}'_\pm=-\frac{\eta}{n^2}(\eta+\eta_\pm)'\mathbf{qh}_\pm,\\
&\mathbf{bF}_\pm=\mathbf{be}_\pm+\frac{\eta}{n^2}\mathbf{ah}_\pm,\quad \mathbf{bF}'_\pm=|\mathbf{be}_\pm-\frac{\eta}{n^2}\mathbf{ah}_\pm,\\
&\mathbf{a}^2\mathbf{q}[\mathbf{F}'_+\mathbf{F}'_-]=\mathbf{aF}'_+\mathbf{bF}'_--\mathbf{aF}'_-\mathbf{bF}'_+.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Значения A', B' и $A_\pm$ необходимо подставить в выражения для полей отраженной $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ и преломленных $\mathbf{E}_\pm$, $\mathbf{H}_\pm$ волн, которые имеют вид [7]

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{E}'=A'\mathbf{a}+B'[\mathbf{n}'\mathbf{a}],\quad \mathbf{H}'=n(A'[\mathbf{n}'\mathbf{a}]-B'\mathbf{a}),\\
&\mathbf{E}_\pm=A_\pm\mathbf{e}_\pm,\quad \mathbf{H}_\pm=A_\pm\mathbf{h}_\pm.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Разумеется, при всех этих расчетах мы должны ограничиваться принятым приближением.

При нормальном падении света выражения для A', B' и $A_\pm$ (23) теряют смысл. Для определения поля отраженной и преломленных волн нужно учесть, что в данном случае

$$\mathbf{n}=\mathbf{n}_\pm=-\mathbf{n}'=\mathbf{q},\quad \mathbf{H}'=-n[\mathbf{qE}'],\quad \mathbf{H}=n[\mathbf{qE}],\quad \mathbf{h}_\pm=n_\pm[\mathbf{qe}_\pm],$$

и поэтому граничные условия принимают вид

$$\mathbf{H}+\mathbf{H}'-A_+\mathbf{h}_+-A_-\mathbf{h}_-=0,$$

$$\mathbf{H}-\mathbf{H}'-\frac{n}{n_+}A_+\mathbf{h}_+-\frac{n}{n_-}A_-\mathbf{h}_-=0.$$

Учитывая, что $\mathbf{h}_\pm\mathbf{h}_\mp^*=0$, $\mathbf{h}_\pm\mathbf{h}_\pm^*=1+\gamma^2$, получаем решение этой системы в виде

$$\left.\begin{aligned}
&A_\pm=\frac{2n_\pm}{(1+\gamma^2)(n_\pm+n)}\mathbf{Hh}_\pm^*,\\
&\mathbf{H}'=\frac{1}{1+\gamma^2}\left(\frac{n_+-n}{n_++n}\mathbf{Hh}_+^*\cdot\mathbf{h}_++\frac{n_--n}{n_-+n}\mathbf{Hh}_-^*\cdot\mathbf{h}_-\right),
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

где $\mathbf{h}_\pm$ и $n_\pm$ определяются выражениями (15), (16) и (13), (11), соответственно.

На основании полученных здесь общих формул рассмотрим отражение и преломление электромагнитных волн оптически активными кристаллами инверсионно-планального класса тетрагональной сингонии. Тензор активности для этих кристаллов имеет вид [6]

$$\alpha=p_1(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2+\mathbf{c}\cdot{}_2\mathbf{c}_1), \tag{27}$$

где p_1 — параметр оптической активности; $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ — векторы, перпендикулярные плоскостям симметрии P_1, P_2, которые вместе с бинормалью $\mathbf{c}$ образуют тройку взаимно-ортогональных единичных векторов $\mathbf{c}=[\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2]$. Бинормаль $\mathbf{c}$ направлена по зеркально-поворотной оси L_{i4}.

Так как для неактивного одноосного кристалла $n_+^0=n_0$, $n_-^0=n_e$, а направления векторов поля определяются выражениями [5]

$$\mathbf{h}_0=\frac{[\mathbf{m}_0[\mathbf{m}_0\mathbf{c}]]}{n_0\sqrt{[\mathbf{m}_0\mathbf{c}]^2}},\quad \mathbf{h}_e=\frac{[\mathbf{m}_e\mathbf{c}]}{\sqrt{[\mathbf{m}_e\mathbf{c}]^2}},\quad \mathbf{e}_0=\frac{[\mathbf{m}_0\mathbf{c}]}{n_0\sqrt{[\mathbf{m}_0\mathbf{c}]^2}},\quad \mathbf{e}_e=\frac{\varepsilon_0\mathbf{c}-\mathbf{m}_e\mathbf{c}\cdot\mathbf{m}_e}{\varepsilon_0\sqrt{[\mathbf{m}_e\mathbf{c}]^2}} \tag{28}$$

(индексы 0 и e характеризуют обыкновенную и необыкновенную волны), то для рассматриваемого активного кристалла имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{h}_+=\mathbf{h}_0+i\gamma\mathbf{h}_e,\quad \mathbf{h}_-=\mathbf{h}_e+i\gamma\mathbf{h}_0,\\
&\mathbf{e}_+=\left(\frac{n_+}{n_0}-\frac{i}{\bar{n}^2}\mathbf{g}^\times\right)\left(\mathbf{e}_0+i\gamma\frac{n_0}{n_e}\mathbf{e}_e\right),\quad \mathbf{e}_-=\left(\frac{n_-}{n_e}-\frac{i}{\bar{n}^2}\mathbf{g}^\times\right)\left(\mathbf{e}_e+i\gamma\frac{n_e}{n_0}\mathbf{e}_0\right).
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}
&n_0=\sqrt{\varepsilon_0},\quad n_e=\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_e}{\mathbf{n}_e\varepsilon\mathbf{n}_e}},\quad \varepsilon=\varepsilon_0+(\varepsilon_e-\varepsilon_0)\mathbf{c}\cdot\mathbf{c},\\
&n_\pm^2=\frac{1}{2}\left(n_0^2+n_e^2\pm\sqrt{(n_0^2-n_e^2)^2+4g^2}\right),\\
&\mathbf{g}=p[\mathbf{c}_1\cdot(\mathbf{bc}_2+\bar{\eta}\mathbf{qc}_2)+\mathbf{c}_2\cdot(\mathbf{bc}_1+\bar{\eta}\mathbf{qc}_1)],\\
&g=\frac{2p}{\bar{n}}(\mathbf{bc}_2+\bar{\eta}\mathbf{qc}_2)(\mathbf{bc}_1+\bar{\eta}\mathbf{qc}_1),\quad p=k_0p_1,\\
&\gamma=\frac{g}{n_0^2-n_e^2},\quad \eta_+=\sqrt{\eta_0^2+\frac{2g^2}{n_0^2-n_e^2}},\quad \eta_-=\sqrt{\eta_e^2-\frac{2g^2}{n_0^2-n_e^2}}.
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$