УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ НЕНИЛЬПОТЕНТНЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. СЕЛЬКИН, Р.В. БОРОДИЧ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Исследуется вопрос о пересечении ненильпотентных максимальных подгрупп. В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Знание их строения, способа вложения в группу, а также взаимодействия между собой и с другими подгруппами позволяют раскрыть многие свойства самих групп. Указанные обстоятельства и предопределили широкий интерес исследователей к максимальным подгруппам.

В данной работе развивается направление, которое восходит к работе Г. Фраттини, установившего нильпотентность пересечения всех максимальных подгрупп конечной группы. Исследуется строение подгруппы, равной пересечению не p-нильпотентных абнормальных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой, для не p-разрешимых групп p > 2. Доказано, что если $p > 2$*, то в любой не p-разрешимой группе* G *подгруппа, равная пересечению не p-нильпотентных абнормальных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой, принадлежит* $\mathrm{N}p\mathrm{N}$*, в частности является метанильпотентной подгруппой.*

Введение. Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Одно из классических направлений в исследовании конечных групп связано с задачей о свойствах пересечений заданных максимальных подгрупп и исследовании влияния этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы.

Важную роль в теории конечных групп занимает подгруппа Фраттини, введенная впервые в работе [1]. Теорема Фраттини получила развитие во многих направлениях [2, 3]. Одно из направлений теории пересечений связано с исследованием пересечений максимальных подгрупп, не принадлежащих заданному классу групп. Эта задача рассматривалась в работах М.В. Селькина [3], Л.И. Шидова [4], В.В. Шлыка [5], А. Гилотти и У. Тиберио [6] и многих других авторов. К данному направлению относится и настоящая работа.

Основная часть. Согласно [3] m-функтором называется функция Θ, которая сопоставляет каждой группе G некоторое множество $\Theta(G)$ её максимальных подгрупп и саму группу G; при этом предполагается, что если $M \in \Theta(G)$, то $M^x \in \Theta(G)$ для всех $x \in G$.

Максимальная подгруппа, не являющаяся нормальной, называется абнормальной.

Если Θ – m-функтор и $M \in \Theta(G)$, то M будем называть Θ-подгруппой группы G. Обозначим через $\Phi_{\Theta}(G)$ и назовем Θ-подгруппой Фраттини, пересечение всех Θ-подгрупп группы G.

Пусть Θ – m-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда $\bar{\Theta}(G)$ – множество всех максимальных подгрупп группы G, которые не сопряжены с некоторой фиксированной максимальной подгруппой M группы G. Понятно, что $\bar{\Theta}(G)$ содержит и саму группу G. При этом $\Phi_{\Theta}(G) = M_G$ – ядро подгруппы M в группе G. Очевидно, что

$$\Phi_{\bar{\Theta}}(G) \cap M_G = \Phi(G)$$

для любой группы G.

Обозначим через $\overline{\Delta}^{p}_{\bar{\Theta}_1}(G)$ пересечением не p-нильпотентных абнормальных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой. А через $\overline{\Delta}^{N}_{\bar{\Theta}_1}(G)$ – пересечением ненильпотентных абнормальных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой.

Всегда будем полагать, что пересечение пустого множества подгрупп из G совпадает с самой группой G.

ЛЕММА 1. [7]. *Пусть* p *– простое нечётное число. Группа* G *является* p*-нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой подгруппы* P*, характеристической в некоторой силовской* p*-подгруппе группы* G*,* $N_G(P)/C_G(P)$ *–* p*-подгруппа.*

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $p>2$ *и* Θ_1 *–* m*-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда для любой не* p*-разрешимой группы* G *справедливо* $\overline{\Delta}^p_{\Theta_1}(G)/P \subseteq \Delta(G/P)$*, где* P *– нормальная* p*-подгруппа группы* G.

Доказательство. Обозначим $D=\overline{\Delta}^p_{\Theta_1}(G)$. Пусть P – силовская p-подгруппа из D, не содержащаяся в максимальной Θ_1-подгруппе M. По лемме Фраттини $G=DN_G(P)$.

Предположим, что $N_G(P)\neq G$. Пусть R – максимальная подгруппа группы G такая, что $N_G(P)\subseteq R$.

Из абнормальности $N_G(P)$ следует, что R является абнормальной.

Так как $G=DR$, то либо R p-нильпотентна, либо не p-нильпотентная подгруппа, сопряженная с максимальной подгруппой M. Если предположить, что R – не p-нильпотентная подгруппа, сопряженная с максимальной подгруппой M, то в силу того, что $|G:M|\neq|G:K|$, получаем противоречие. Остается заключить, что R – p-нильпотентная подгруппа группы G. Следовательно, $N_G(P)$ – p-нильпотентная подгруппа.

Если D p-нильпотентна, то нетрудно видеть, что группа G p-разрешима. Противоречие.

Будем считать, что D не p-нильпотентна. Тогда по лемме 1 найдётся характеристическая подгруппа P^* из P такая, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ – не p-группа. Так как $N_G(P)\subseteq N_G(P^*)$, то $G=DN_G(P^*)$.

Возможны случаи:

- $N_G(P^*)=G$;
- $N_G(P^*)$ p-нильпотентна.

Так как $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ не p-группа, то второй случай невозможен. Остаётся принять, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ – не p-группа и $P^*\lhd G$.

Пусть P^* – максимальная подгруппа среди характеристических подгрупп группы P, обладающая отмеченными выше свойствами. Так как $N_G(P)$ p-нильпотентна, то $P^*\subset P$. Пусть P_0/P^* – характеристическая подгруппа группы P/P^*. Тогда P_0 характеристична в P и $P^*\subset P_0$. Ввиду выбора подгруппы P^* получаем, что $N_D(P_0)/C_D(P_0)$ – p-группа.

Заметим, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*)=N_D(P_0)/P^*$ и $C_D(P_0)P^*/P^*\subseteq C_{D/P^*}(P_0/P^*)$. Отсюда получаем, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*)/C_{D/P^*}(P_0/P^*)$ – p-группа. Следовательно, по лемме 1 группа D/P^* является p-нильпотентной. Но тогда D является p-разрешимой группой. Отсюда и из p-разрешимости G/D следует p-разрешимость и самой группы G. Противоречие. Остаётся заключить, что P – нормальная p-подгруппа группы G.

Так как MP, то несложно заметить, что $\overline{\Delta}^p_{\Theta_1}(G)/P\subseteq\Delta(G/P)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Пусть* $p>2$ *и* Θ_1 *–* m*-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда в любой не* p*-разрешимой группе* G *существует нормальная* p*-подгруппа* P *такая, что* $\overline{\Delta}^p_{\Theta_1}(G)/P\in \mathrm{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Пусть* $p>2$ *и* Θ_1 *–* m*-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда в любой не* p*-разрешимой группе* G *подгруппа* $\overline{\Delta}^p_{\Theta_1}(G)\in \mathrm{N}_p\mathrm{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *В любой не* p*-разрешимой группе* G*,* $p>2$*, подгруппа, равная пересечению не* p*-нильпотентных абнормальных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой, метанильпотентна.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* Θ_1 *–* m*-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда для любой неразрешимой группы* G *справедливо* $\overline{\Delta}^N_{\Theta_1}(G)/P \subseteq \Delta(G/P)$*, где* P *– нормальная* p*-подгруппа группы* G.

Доказательство. Несложно заметить, что

$$\overline{\Delta}^p_{\Theta_1}(G) \supseteq \overline{\Delta}^N_{\Theta_1}(G) \supseteq \Delta(G).$$

Если G не разрешима, то G не p-разрешима для некоторого $p \in \pi(G)$.

Если $p > 2$, то по теореме 1 $\overline{\Delta}^p_{\Theta_1}(G)/P \subseteq \Delta(G/P)$, а следовательно $\overline{\Delta}^N_{\Theta_1}(G)/P \subseteq \Delta(G/P)$.

Пусть G p-разрешима для любого нечётного $p \in \pi(G)$. Нетрудно видеть, что в этом случае G является разрешимой.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Пусть* Θ_1 *–* m*-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда в любой неразрешимой группе* G *существует нормальная* p*-подгруппа* P *такая, что* $\overline{\Delta}^N_{\Theta_1}(G)/P \in \mathrm{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Пусть* Θ_1 *–* m*-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых максимальных подгрупп и саму группу. Тогда в любой неразрешимой группе подгруппа* $\overline{\Delta}^N_{\Theta_1}(G) \in \mathrm{N}\,\mathrm{p}\,\mathrm{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *В любой неразрешимой группе* G *подгруппа, равная пересечению ненильпотентных абнормальных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой, метанильпотентна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281 – 285.
2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
3. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Минск: Беларус. навука, 1997. – 144 с.
4. Шидов, Л.И. О максимальных подгруппах конечных групп / Л.И. Шидов // Сиб. матем. Журнал. – 1971. – Т. 12, № 3. – С. 682 – 683.
5. Шлык, В.В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В.В. Шлык // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 429 – 439.
6. Gilotti, A. On the intersection of maximal non-supersoluble subgroups in a finite group / A. Gilotti, U. Tiberio // Bollettino U.M.I. – 2000. – 8, 3-B. – P. 691 – 698.
7. Thompson, J.G. Normal p-complements for finite groups / J.G. Thompson // J. Algebra 1. – 1964. – P. 43 – 46.

Поступила 28.03.2008