

С. А. ТЕРСЕНОВ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 11 V 1972)

Пусть $D = [G \times (0, 1)]$ — цилиндрическая область в E_{n+1} с образующими, параллельными оси t , боковую поверхность которой обозначим через Γ ; G — односвязная область в E_n с границей S , содержащая внутри себя начало координат. Будем считать, что каждая из осей координат x_k пересекает S в двух точках. Обозначим через $G_\tau^+(k_1, \dots, k_r)$ ($G_\tau^-(k_1, \dots, k_r)$) часть сечения области D плоскостью $t = \tau$, где $x_{k_s} < 0$, $s = 1, 2, \dots, r$, и $\text{sgn}(x_{k_1} \dots x_{k_r}) > 0$ ($\text{sgn}(x_{k_1} \dots x_{k_r}) < 0$), а остальные координаты $x_i > 0$, и пусть

$$G_t^\pm = \bigcup_r G_\tau^\pm(k_1, \dots, k_r), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Через $P_m(k_1, \dots, k_r)$ обозначим часть P_m сечения области D плоскостью $x_m = 0$, где $x_{k_s} < 0$, $k_s \neq m$, $s = 1, \dots, r$.

В области $D - \bigcup_m P_m$ рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{k=1}^n (|x_k| u_{x_k x_k} + \alpha_k u_{x_k} \text{sgn } x_k) \text{sgn}(x_1 \dots x_n) = u_t, \quad (1)$$

где $\alpha_k > 0$ постоянные.

Очевидно, $L(u)$ является эллиптическим оператором, который вырождается на гиперплоскостях $x_m = 0$; причем при переходе через эти гиперплоскости квадратичная форма, соответствующая оператору $L(u)$, меняет знак. Ниже при различных значениях α_k для уравнения (1) ставится и исследуется задача, аналогичная известной задаче Трикоми с несколькими условиями склеивания на гиперплоскостях вырождения.

1. Пусть все $0 < \alpha_k < 1$. Требуется найти непрерывную в $\bar{D}$ функцию u , которая является решением уравнения (1) в $D - \bigcup_m P_m$ и удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u|_\Gamma = \Phi, \quad u|_{G_0^+} = f_1, \quad u|_{G_1^-} = f_2 \quad (2)$$

и условиям склеивания

$$|x_k|^{\alpha_k} u_{x_k}|_{x_k=+0} = |x_k|^{\alpha_k} u_{x_k}|_{x_k=-0}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Единственность. Если функции $\psi_k |x_k|^{\alpha_k} u_{x_k}$ интегрируемы в областях P_k , а ψu_{x_i} интегрируемы в областях G_0^+ и G_1^- , то задача (1) — (3) имеет единственное решение, где

$$\psi = \prod_{k=1}^n |x_k|^{\alpha_k - 1}, \quad \psi_k = \psi |x_k|^{1 - \alpha_k}.$$

В самом деле, если перепишем уравнение (1) в виде

$$\sum_{k=1}^n (\psi_k |x_k|^{\alpha_k} u_{x_k})_{x_k} \text{sgn}(x_1 \dots x_n) = \psi u_t,$$

затем умножим на u и проинтегрируем по областям $D^+ = [G_0^+ \times (0, 1)]$ и $D^- = [G_1^- \times (0, 1)]$ с учетом условий $\Phi = f_1 = f_2 \equiv 0$, то получим

$$\sum_{k=1}^n a_k = - \int_{D^+} \left(\sum_{k=1}^n \psi_k |x_k|^{\alpha_k} u_{x_k}^2 \right) dx dt - \frac{1}{2} \int_{G_1^+} \psi u^2 dx, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \int_{D^-} \left(\sum_{k=1}^n \psi_k |x_k|^{\alpha_k} u_{x_k}^2 \right) dx dt + \frac{1}{2} \int_{G_0^-} \psi u^2 dx, \quad (5)$$

где

$$a_k = \int_{\mathbb{R}^k} \psi_k u (|x_k|^{\alpha_k} u_{x_k})_{x_k=0} \operatorname{sgn}(x_1 \dots x_{k-1} x_{k+1} \dots x_n) dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} \dots dx_n.$$

Из (4) и (5) нетрудно получить, что $u \equiv 0$.

Доказательство существования решения задачи (1) — (3) приведем для случая $n = 1$. Представив решение u при $x > 0$ и $x < 0$ в виде рядов по функциям Бесселя и удовлетворив условия склеивания при $x = 0$, для определения функции $\varphi(t) = x^\alpha u_x|_{x=0}$ получим интегральное уравнение

$$\int_0^t K_1(t-z) \varphi(z) dz + \int_t^1 K_1(z-t) \varphi(z) dz = \psi_0(t), \quad (6)$$

где $\psi_0(t)$ — известная функция, вполне определенным образом выражаемая через краевые значения, а

$$K_1(t) = \frac{2^{2(1-\alpha)}}{\Gamma^2(\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-1/4 \lambda_n^2 t} \frac{1}{\lambda_n^{2(1-\alpha)} \mathcal{J}_\alpha^2(\lambda_n)},$$

$\alpha = \alpha_1$, λ_n — положительные корни уравнения $\mathcal{J}_{\alpha-1}(x) = 0$.

Решая первую краевую задачу для уравнения (1) при $0 < \alpha < 1$ в области $0 < x < 1$, $0 < t < 1$, нетрудно показать, что решением уравнения

$$\int_0^t K_1(t-z) \varphi(z) dz = \psi(t) \quad (7)$$

будет функция

$$\varphi(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t K_2(t-z) \psi(z) dz, \quad (8)$$

где

$$K_2(t) = 1 - \alpha + \frac{2^{2\alpha}}{\Gamma^2(1-\alpha)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-1/4 \mu_n^2 t} \frac{1}{\mu_n^{2\alpha} \mathcal{J}_{2-\alpha}^2(\mu_n)},$$

μ_n — положительные корни уравнения $\mathcal{J}_{1-\alpha}(x) = 0$.

На основании асимптотических поведений чисел λ_n и μ_n легко показать, что

$$C_1 t^{-\alpha} \leq K_1(t) \leq C_2 t^{-\alpha}, \quad C_3 t^{\alpha-1} \leq K_2(t) \leq C_4 t^{\alpha-1}, \quad (9)$$

где $C_i > 0$ постоянные.

В силу (9) и (8), уравнение (6) можно в соответствующих классах функций свести к сингулярному уравнению, разрешимость которого будет следовать из единственности решения задачи (1) — (3).

Заметим следующее свойство решений уравнения (1). Если u является решением уравнения (1), то для $m \leq n$ и для любого набора $\alpha_{r_1}, \dots, \alpha_{r_m}$

из чисел α_i в области $x_i > 0, i = 1, \dots, n$, функция

$$v = x_{r_1}^{\alpha_{r_1}-1} \dots x_{r_m}^{\alpha_{r_m}-1} u$$

будет решением уравнения

$$\sum_{s=1}^m (x_{r_s} v_{x_{r_s} x_{r_s}} + \alpha'_{r_s} v_{x_{r_s}}) + \sum' (x_i v_{x_i x_i} + \alpha_i v_{x_i}) = v_l, \quad (10)$$

где Σ' означает суммирование по $i \neq r_s, s = 1, \dots, m, \alpha'_{r_s} = 2 - \alpha_{r_s}$.

Это свойство проверяется непосредственной подстановкой.

2. Пусть теперь $1 < \alpha_i < 2, i = 1, 2, \dots, m \leq n$, а для остальных значений i $0 < \alpha_i < 1$. Тогда, в силу указанной связи решений уравнений (1) и (10), аналогичным путем можно доказать единственность и существование (в случае $n = 1$) такого решения u уравнения (1) в $D - \bigcup_m P_m$, чтобы

функция

$$v = \prod_{k=1}^m |x_k|^{\alpha_k-1} u = \omega u \quad (11)$$

была непрерывной в $\bar{D}$, принимала заданные значения на $\Gamma \cup G_0^+ \cup G_1^-$ и удовлетворяла условиям склеивания (3), $\alpha_{r_s} = \alpha'_{r_s}$.

3. Из предыдущего пункта видно, что при $\alpha_i > 1$ уравнение (1) имеет неограниченные решения, эквивалентные функции ω . Как и в (5), нетрудно доказать следующее

У т в е р ж д е н и е. Если u — решение уравнения (1) в $D - \bigcup_m P_m$, непрерывное в области

$$(D - \bigcup_m P_m) \cup \bar{\Gamma} \cup \bar{G}_0^+ \cup \bar{G}_1^-$$

и $\omega u = 0$ на гиперплоскостях P_m , то u ограничено в $\bar{D}$.

Пусть все $\alpha_i > 1$. Тогда в классе ограниченных решений имеет место следующее

У т в е р ж д е н и е. Существует единственное ограниченное в $\bar{D}$ решение u уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u|_{\Gamma^+} = \varphi_1, \quad \bar{u}|_{G_0^+} = \varphi_2, \quad (12)$$

где Γ^+ — часть Γ , соответствующая области D^+ .

Единственность доказывается методом, указанным в (1), с использованием принципа максимума для параболических уравнений и единственности решения задачи Коши. Существование для случая $n = 1$ можно получить разложением решения по бесселевым функциям.

В случае, если не все $\alpha_i > 1$, то постановка задачи ясна. Доказательство существования решений сформулированных задач в случае $n \geq 2$ будет приведено в другой статье.

Новосибирский государственный университет

Поступило
28 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 2 (1951). ² D. Colton, J. Differ. Equat., 8, 2 (1970). ³ D. Haimo, J. Math. Mech., 15 (1966). ⁴ D. Widder, Duke Math. J., 20 (1962). ⁵ С. А. Терсенов, ДАН, 115, № 4 (1957).