

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ГРАФЫ И КЛАССЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко

Аннотация. *Арифметической графовой функцией* называется отображение, которое каждой конечной группе G ставит в соответствие граф, вершинами которого являются делители $|G|$. Сформулирована и исследована проблема распознавания насыщенных наследственных формаций арифметическими графовыми функциями. Данная проблема решена для некоторых примеров арифметических графовых функций.

DOI 10.33048/smzh.2019.60.105

Ключевые слова: конечная группа, ориентированный граф, распознавание класса групп графом, арифметическая графовая функция, наследственная насыщенная формация.

*Посвящается светлой памяти
профессора Л. А. Шеметкова*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. В настоящее время имеется значительное число работ, в которых каждой конечной группе ставится в соответствие определенный граф и исследуется связь свойств графа со свойствами группы (см., например, [1–6]). Это направление восходит к работе Кэли 1878 г. [7]. Введенный им граф группы, называемый в настоящее время графом Кэли, имеет большое число приложений (см., например, [8]). Другой яркой иллюстрацией этого направления является проблема Эрдеша о графах некоммутативности, решенная Нейманом [9] в 1976 г. К настоящему времени накоплено много различных способов сопоставления графа заданной группе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функцию Γ , которая ставит в соответствие каждой группе G граф $\Gamma(G)$, назовем *графовой функцией*.

В данной работе будем рассматривать графы, вершинами которых являются делители (простые делители) порядка группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Графовую функцию Γ назовем *арифметической*, если множество вершин $V(\Gamma(G))$ графа $\Gamma(G)$ есть подмножество множества делителей $|G|$ для любой группы G и $\Gamma(1) = \emptyset$. Граф $\Gamma(G)$ назовем *арифметическим*.

Важным примером арифметического графа является граф простых чисел или граф Грюнберга — Кегеля группы. Напомним [10, 11], что *графом простых чисел* $\Gamma_p(G)$ группы G называется граф с множеством вершин $V(\Gamma_p(G)) = \pi(G)$, где $\pi(G)$ — множество всех простых делителей $|G|$ и (p, q) является ребром

$\Gamma_p(G)$, если G имеет элемент порядка pq . Данный граф тесно связан с решением известной проблемы распознавания групп по спектру (см., например, [12]).

В 1968 г. Хоукс [13] рассмотрел ориентированный граф группы G , у которого множество вершин совпадает с $\pi(G)$ и (p, q) является ребром, если $q \in \pi(G/O_{p',p}(G))$. Этот граф будем называть *графом Хоукса* и обозначать через $\Gamma_H(G)$. Хоукс показал, что группа G дисперсивна тогда и только тогда, когда $\Gamma_H(G)$ не имеет циклов. Отметим, что граф $\Gamma_H(G)$ может иметь петли.

В [5, 14] было введено понятие силовского графа группы, которое использовалось при изучении свойств решеточных формаций. Напомним [5], что *силовским графом* $\Gamma_s(G)$ группы G называется ориентированный граф с множеством вершин $\pi(G)$ и (p, q) является ребром $\Gamma_s(G)$, если $q \in \pi(N_G(P)/PC_G(P))$ для некоторой силовой p -подгруппы P группы G .

Рассмотрим еще один пример арифметического графа группы. Напомним, что (p, q) -*группой Шмидта* называется группа Шмидта G , для которой $\pi(G) = \{p, q\}$ и которая имеет нормальную силовскую p -подгруппу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. N -*критическим графом* $\Gamma_{Nc}(G)$ группы G назовем ориентированный граф, для которого $V(\Gamma_{Nc}(G)) = \pi(G)$ и (p, q) является ребром $\Gamma_{Nc}(G)$, если в G имеется (p, q) -подгруппа Шмидта.

Отметим, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда ее N -критический граф вполне несвязен.

Следуя [2], будем говорить, что группа G *распознаваема по графу простых чисел*, если из $\Gamma_p(G) = \Gamma_p(H)$ всегда следует $H \simeq G$ для любой группы H . Как отмечено в [2], существует бесконечное множество неизоморфных групп с нетривиальным разрешимым радикалом и одинаковым графом простых чисел. Поэтому проблема распознавания групп по графу простых чисел представляет интерес только для простых или почти простых групп. В данной работе будем рассматривать проблему распознавания групп по графу с точностью до класса групп в смысле следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть Γ — графовая функция и $\mathfrak{X}$ — класс групп. Класс $\mathfrak{X}$ назовем *распознаваемым графовой функцией* Γ , если из $G_1 \in \mathfrak{X}$ и $\Gamma(G_1) = \Gamma(G_2)$ всегда следует, что $G_2 \in \mathfrak{X}$.

Проблема 1.5. (а) Пусть Γ — арифметическая графовая функция. Описать все классы групп (формации, классы Фиттинга, классы Шунка), которые распознаются графовой функцией Γ .

(б) Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп (формация, класс Фиттинга, класс Шунка). Найти арифметические графовые функции Γ , которые распознают $\mathfrak{X}$.

Рассмотрению ряда случаев этой проблемы и применению арифметических графов к изучению строения групп и посвящена настоящая работа.

1. Предварительные сведения

В работе используются стандартные терминология и обозначения из теории групп и графов, которые могут быть найдены в [15–18]. Напомним, что $H \leq G$ ($H \trianglelefteq G$) означает, что H является (нормальной) подгруппой группы G ; H/K называется *секцией группы* G , если $H \leq G$ и $K \trianglelefteq H$; $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p -подгруппа группы G ; $O_{p'}(G)$ — наибольшая нормальная p' -подгруппа группы G ; $O_{p',p}(G)$ — p -нильпотентный радикал группы G , который определяется равенством $O_{p',p}(G)/O_{p'}(G) = O_p(G/O_{p'}(G))$; Z_n — циклическая группа порядка n ; $\mathbb{P}$ — множество простых чисел; $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых

групп. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп. Тогда $\pi(\mathfrak{X}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \pi(G)$. Напомним следующие известные операции на классах групп (см. [16, гл. II, разд. 1]):

$$\mathbf{Q}\mathfrak{X} = (G \mid \exists H \in \mathfrak{X} \text{ и эпиморфизм из } H \text{ на } G);$$

$$\mathbf{R}_0\mathfrak{X} = \left(G \mid \exists N_i \trianglelefteq G \ (i = 1, \dots, n), \text{ где } G/N_i \in \mathfrak{X} \text{ и } \bigcap_{i=1}^n N_i = 1 \right);$$

$$\mathbf{S}\mathfrak{X} = (G \mid \exists H \in \mathfrak{X} \text{ и } G \leq H);$$

$$\mathbf{D}_0\mathfrak{X} = (G \mid \exists N_i \in \mathfrak{X} \ (i = 1, \dots, n) \text{ и } G = N_1 \times \dots \times N_n);$$

$$\mathbf{N}_0\mathfrak{X} = (G \mid \exists N_i \in \mathfrak{X}, N_i \trianglelefteq G \ (i = 1, \dots, n) \text{ и } G = N_1 \cdots N_n);$$

$$\mathbf{E}_\Phi\mathfrak{X} = (G \mid \exists H \in \mathfrak{X} \text{ и } G/\Phi(G) \simeq H).$$

Ниже требуется также следующая операция:

$$\mathbf{DM}\mathfrak{X} = (G \mid \exists K \in \mathfrak{X} \text{ и } K = G \times H).$$

Пусть $\mathbf{C}$ обозначает одну из операций, введенных выше. Тогда класс групп $\mathfrak{X}$ называется **C-замкнутым**, если $\mathbf{C}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс групп $\mathfrak{F} = \{\mathbf{R}_0, \mathbf{Q}\}\mathfrak{F}$ называется *формацией*. Формация называется *наследственной*, если она **S**-замкнута. Хорошо известно, что если $\mathfrak{F} = \mathbf{QSD}_0\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. *Формацией Фиттинга* называется $\mathbf{N}_0$ -замкнутая формация, замкнутая относительно взятия нормальных подгрупп.

Напомним, что **E**_Φ-замкнутая формация называется *насыщенной*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *разрешимо насыщенной*, если из $G/\Phi(G_\mathfrak{S}) \in \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$, где $G_\mathfrak{S}$ — разрешимый радикал группы G . Важным свойством насыщенных и разрешимо насыщенных формаций является то, что они могут быть конструктивно заданы с помощью локального и композиционного экранов.

Всякая функция $f : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ совпадает с классом $LF(f)$ всех групп G таких, что $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K группы G и $p \in \pi(H/K)$. По известной теореме Гашюца — Любезедер — Шмидта непустая формация локальна тогда и только тогда, когда она насыщенная.

Напомним, что $C^p(G)$ — пересечение централизаторов всех главных абелевых p -факторов G ($C^p(G) = G$, если G не имеет таких факторов). Пусть f — функция вида $f : \mathbb{P} \cup \{0\} \rightarrow \{\text{формации}\}$. Напомним, что $CLF(f) = (G \mid G/G_\mathfrak{S} \in f(0) \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G) \text{ таких, что в } G \text{ имеется главный абелев } p\text{-фактор})$. Если $\mathfrak{F} = CLF(f)$ для некоторого f , то формация $\mathfrak{F}$ называется *композиционной*. По теореме Бэра (см. [16, гл. IV, теорема 4.17]) формация разрешимо насыщенная тогда и только тогда, когда она композиционна.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. *Минимальной не- $\mathfrak{F}$ -группой* называется группа $G \notin \mathfrak{F}$, все собственные подгруппы которой принадлежат $\mathfrak{F}$. Группой Шмидта называется минимальная ненильпотентная группа. Формация $\mathfrak{F}$ называется *формацией с условием Шеметкова* (кратко *$\check{S}$ -формацией*), если всякая минимальная не- $\mathfrak{F}$ -группа есть группа Шмидта или группа простого порядка.

Напомним [18], что *графом* Γ называется пара множеств $V(\Gamma)$ и $E(\Gamma)$, где $V(\Gamma)$ — множество вершин Γ и $E(\Gamma)$ — множество ребер Γ , т. е. множество упорядоченных пар элементов $V(\Gamma)$. Ребро (v, v) называется *петлей*. Если из $(a, b) \in E(\Gamma)$ всегда следует, что $(b, a) \in E(\Gamma)$ для любого $(a, b) \in E(\Gamma)$, то граф Γ называется *неориентированным*. Два графа Γ_1 и Γ_2 называются *равными* ($\Gamma_1 = \Gamma_2$), если $V(\Gamma_1) = V(\Gamma_2)$ и $E(\Gamma_1) = E(\Gamma_2)$. Граф Γ_1 называется *подграфом* графа Γ_2 ($\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$), если $V(\Gamma_1) \subseteq V(\Gamma_2)$ и $E(\Gamma_1) \subseteq E(\Gamma_2)$. Граф Γ называется *объединением графов* Γ_1 и Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$), если $V(\Gamma) = V(\Gamma_1) \cup V(\Gamma_2)$ и $E(\Gamma) = E(\Gamma_1) \cup E(\Gamma_2)$.

2. Арифметические графовые функции и их свойства

Рассмотренные выше граф Хоукса, силовский и N -критический графы являются частными случаями следующей общей конструкции арифметической графовой функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функцию f назовем *секционным функтором*, если f ставит в соответствие каждой группе G (возможно, пустое) множество $f(G)$ секций группы G , удовлетворяющее $\alpha(f(G)) = f(\alpha(G))$ для любого изоморфизма $\alpha : G \rightarrow G^*$.

Пусть H/K — секция группы G . Тогда $N_G(H/K)/C_G(H/K)$ является группой автоморфизмов секции H/K , индуцированной группой G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть θ — функция, которая каждому простому числу p ставит в соответствие секционный функтор θ_p .

(1) Будем называть Γ_θ *θ -локальной арифметической графовой функцией*, если $V(\Gamma_\theta(G)) = \pi(G)$ и $(p, q) \in E(\Gamma_\theta(G))$, где $q \in \pi(\{N_G(P)/C_G(P) \mid P \in \theta_p(G)\})$ для любой группы G .

(2) Будем называть $\Gamma_{\bar{\theta}}$ *$\bar{\theta}$ -локальной арифметической графовой функцией*, если $V(\Gamma_{\bar{\theta}}(G)) = \pi(G)$ и $(p, q) \in E(\Gamma_{\bar{\theta}}(G))$, где $q \neq p$ и $q \in \pi(\{N_G(P)/C_G(P) \mid P \in \theta_p(G)\})$ для любой группы G .

Предложение 2.3. Пусть θ — функция, которая каждому простому числу p ставит в соответствие секционный функтор θ_p . Тогда

(1) если $\theta_p(G)$ — множество всех главных p -факторов группы G для любого простого p , то $\Gamma_\theta(G) = \Gamma_H(G)$;

(2) если $\theta_p(G)$ — множество всех силовских p -подгрупп группы G для любого простого p , то $\Gamma_\theta(G) = \Gamma_s(G)$;

(3) если $\theta_p(G)$ — множество всех p -подгрупп группы G для любого простого p , то $\Gamma_\theta(G) = \Gamma_{Nc}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Заметим, что $V(\Gamma_\theta(G)) = V(\Gamma_H(G))$. Покажем, что $E(\Gamma_\theta(G)) \subseteq E(\Gamma_H(G))$. Пусть $(p, q) \in E(\Gamma_\theta(G))$. Тогда $q \in \pi(G/C_G(H/K))$ для некоторого главного p -фактора H/K группы G . Так как $O_{p',p}(G)$ является пересечением централизаторов всех главных p -факторов группы G , то $G/C_G(H/K)$ является фактор-группой группы $G/O_{p',p}(G)$. Следовательно, $q \in \pi(G/O_{p',p}(G))$. Итак, $(p, q) \in E(\Gamma_H(G))$ и $E(\Gamma_\theta(G)) \subseteq E(\Gamma_H(G))$.

Докажем обратное включение. Пусть $(p, q) \in E(\Gamma_H(G))$. В том случае, если $q \notin \pi(G/C_G(H/K))$ для любого главного p -фактора H/K группы G , пересечение централизаторов всех главных p -факторов $O_{p',p}(G)$ группы G содержит все q -элементы группы G . Значит, $(p, q) \notin E(\Gamma_H(G))$; противоречие. Следовательно, $q \in \pi(G/C_G(H/K))$ для некоторого главного p -фактора H/K группы G . Значит, $(p, q) \in E(\Gamma_\theta(G))$ и $E(\Gamma_H(G)) \subseteq E(\Gamma_\theta(G))$. Итак, $\Gamma_\theta(G) = \Gamma_H(G)$.

Утверждение (2) следует из определения $\Gamma_s(G)$.

(3) Пусть $\theta_p(G)$ — множество всех p -подгрупп группы G для любого простого p и $\Gamma_{\bar{\theta}}(G) = \Gamma(G)$. Ясно, что $\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma(G)$ для любой группы G . Докажем обратное включение. Если $(p, q) \in E(\Gamma(G))$, то существует p -подгруппа P группы G такая, что $q \in \pi(N_G(P)/C_G(P))$. Пусть Q — силовская q -подгруппа $N_G(P)$. Заметим, что PQ — ненильпотентная бипримарная группа с нормальной силовской p -подгруппой. Следовательно, PQ содержит (p, q) -группу Шмидта. Поэтому $(p, q) \in E(\Gamma_{Nc}(G))$. Итак, $\Gamma = \Gamma_{Nc}$. $\square$

Предложение 2.4. $\Gamma_s(G) \subseteq \Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_H(G)$ для любой группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\Gamma_s(G) \subseteq \Gamma_{Nc}(G)$ следует из предложения 2.3. Если $q \in \pi(N_G(P)/C_G(P))$ и $q \neq p$ для некоторой p -подгруппы P группы G , то $q \in \pi(N_G(P)/O_{p',p}(N_G(P)))$. Из $O_{p',p}(G) \cap N_G(P) \leq O_{p',p}(N_G(P))$ следует, что $\Gamma_{Nc}(G) \subseteq \Gamma_H(G)$ для любой группы G . $\square$

ПРИМЕР 2.5. Пусть S_4 — симметрическая группа степени 4. Тогда

$$V(\Gamma_s(S_4)) = V(\Gamma_{Nc}(S_4)) = V(\Gamma_H(S_4)) = \{2, 3\},$$

$$\begin{aligned} E(\Gamma_s(S_4)) &= \{(3, 2)\} \subset E(\Gamma_{Nc}(S_4)) \\ &= \{(3, 2), (2, 3)\} \subset E(\Gamma_H(S_4)) = \{(3, 2), (2, 3), (2, 2)\}. \end{aligned}$$

В настоящей работе будем рассматривать только те арифметические графовые функции, свойства которых связаны с операциями на классах групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Арифметическую графовую функцию Γ назовем

- (а) $\bar{\mathbf{S}}$ -замкнутой, если $H \leq G$ влечет $\Gamma(H) \subseteq \Gamma(G)$;
- (б) $\bar{\mathbf{Q}}$ -замкнутой, если $\Gamma(G/N) \subseteq \Gamma(G)$ для любой группы G и $N \trianglelefteq G$;
- (с) $\bar{\mathbf{D}}_0$ -замкнутой, если $\Gamma(G_1 \times \cdots \times G_n) = \Gamma(G_1) \cup \cdots \cup \Gamma(G_n)$ для любых групп $G_1, \dots, G_n$;

- (д) $\bar{\mathbf{R}}_0$ -замкнутой, если $\Gamma(G/N_1) \cup \cdots \cup \Gamma(G/N_n) = \Gamma\left(G / \bigcap_{i=1}^n N_i\right)$ для любой группы G и ее нормальных подгрупп $N_1, \dots, N_n$;

- (е) $\bar{\mathbf{N}}_0$ -замкнутой, если $\Gamma(N_1) \cup \cdots \cup \Gamma(N_n) = \Gamma(G)$ для любой группы $G = N_1 \cdots N_n$ и ее нормальных подгрупп $N_1, \dots, N_n$;

- (ф) $\bar{\mathbf{E}}_\Phi$ -замкнутой, если $\Gamma(G/\Phi(G)) = \Gamma(G)$ для любой группы G .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для доказательства $\bar{\mathbf{C}}$ -замкнутости арифметической графовой функции, где $\bar{\mathbf{C}} \in \{\bar{\mathbf{D}}_0, \bar{\mathbf{R}}_0, \bar{\mathbf{N}}_0\}$, достаточно рассмотреть случай $n = 2$.

Отметим, что Γ_p является $\bar{\mathbf{S}}$ -замкнутой и $\bar{\mathbf{Q}}$ -замкнутой, но не $\bar{\mathbf{D}}_0$ -замкнутой арифметической графовой функцией.

Теорема 2.7. Верны следующие утверждения:

- (1) $\Gamma_H - \{\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{D}}_0, \bar{\mathbf{R}}_0, \bar{\mathbf{N}}_0, \bar{\mathbf{E}}_\Phi\}$ -замкнутая графовая функция;
- (2) $\Gamma_{Nc} - \{\bar{\mathbf{S}}, \bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{D}}_0, \bar{\mathbf{R}}_0, \bar{\mathbf{N}}_0\}$ -замкнутая, но не $\bar{\mathbf{E}}_\Phi$ -замкнутая графовая функция;
- (3) $\Gamma_s - \{\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{R}}_0\}$ -замкнутая, но не $\bar{\mathbf{S}}$ -замкнутая графовая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $\Gamma = \Gamma_H$. Покажем, что Γ $\bar{\mathbf{S}}$ -замкнута. Пусть H — подгруппа группы G . Из $H \cap O_{p',p}(G) \leq O_{p',p}(H)$ следует, что $H/O_{p',p}(H)$ изоморфна фактор-группе группы $H/H \cap O_{p',p}(G) \simeq HO_{p',p}(G)/O_{p',p}(G)$. Следовательно, $\pi(H/O_{p',p}(H)) \subseteq \pi(G/O_{p',p}(G))$ и $\Gamma(H) \subseteq \Gamma(G)$. Итак, Γ $\bar{\mathbf{S}}$ -замкнута.

Докажем $\bar{\mathbf{Q}}$ -замкнутость Γ . Из того, что $O_{p',p}(G)N/N \leq O_{p',p}(G/N)$, вытекает, что $G/N/O_{p',p}(G/N)$ изоморфна фактор-группе группы $G/N/O_{p',p}(G)N/N \simeq G/O_{p',p}(G)N$. Значит, $\Gamma(G/N) \subseteq \Gamma(G)$. Итак, Γ $\bar{\mathbf{Q}}$ -замкнута.

Заметим, что если Γ $\bar{\mathbf{N}}_0$ -замкнута, то она и $\bar{\mathbf{D}}_0$ -замкнута. Докажем $\bar{\mathbf{N}}_0$ -замкнутость Γ . Пусть $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы группы G . Из $\bar{\mathbf{S}}$ -замкнутости Γ следует, что $\Gamma(A) \cup \Gamma(B) \subseteq \Gamma(G)$. Заметим, что

$$O_{p',p}(A)O_{p',p}(B) \leq O_{p',p}(G),$$

$$A \cap O_{p',p}(A)O_{p',p}(B) = O_{p',p}(A), \quad B \cap O_{p',p}(A)O_{p',p}(B) = O_{p',p}(B).$$

Следовательно, $G/O_{p',p}(G)$ изоморфна фактор-группе группы

$$\begin{aligned} & G/O_{p',p}(A)O_{p',p}(B) \\ &= (AO_{p',p}(A)O_{p',p}(B)/O_{p',p}(A)O_{p',p}(B))(BO_{p',p}(A)O_{p',p}(B)/O_{p',p}(A)O_{p',p}(B)). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} AO_{p',p}(A)O_{p',p}(B)/O_{p',p}(A)O_{p',p}(B) &\simeq A/O_{p',p}(A), \\ BO_{p',p}(A)O_{p',p}(B)/O_{p',p}(A)O_{p',p}(B) &\simeq B/O_{p',p}(B), \end{aligned}$$

то $\Gamma(G) \subseteq \Gamma(A) \cup \Gamma(B)$. Значит, $\Gamma(G) = \Gamma(A) \cup \Gamma(B)$.

Докажем, что $\Gamma \bar{\mathbf{R}}_0$ -замкнута. Пусть A и B — нормальные подгруппы группы G . Ясно, что $\Gamma(G/A) \cup \Gamma(G/B) \subseteq \Gamma(G)$. По теореме Ремака G изоморфна подгруппе $G/A \times G/B$. Стало быть, $\Gamma(G) \subseteq \Gamma(G/A) \cup \Gamma(G/B)$. Итак, $\Gamma(G) = \Gamma(G/A) \cup \Gamma(G/B)$.

Известно, что $\Phi(G) \leq O_{p',p}(G)$ и $O_{p',p}(G/\Phi(G)) = O_{p',p}(G)/\Phi(G)$. Следовательно, $\Gamma \bar{\mathbf{E}}_0$ -замкнута.

(2) Пусть $\Gamma = \Gamma_{Nc}$. Очевидно, что $\Gamma \bar{\mathbf{S}}$ -замкнута. Пусть группа G не имеет (p, q) -подгрупп Шмидта. Это означает, что все $\{p, q\}$ -подгруппы G p -нильпотентны. Пусть N — нормальная подгруппа группы G и H/N — $\{p, q\}$ -подгруппа G/N . Согласно лемме 11.1 из [17] найдется подгруппа R группы G такая, что $RN = H$ и $R \cap N \subseteq \Phi(R)$. Так как H/N — $\{p, q\}$ -подгруппа, из $H/N = RN/N \simeq R/R \cap N$ следует, что R также является $\{p, q\}$ -группой. Поскольку R p -нильпотентна, H/N также p -нильпотентна. Следовательно, G/N не содержит (p, q) -подгрупп Шмидта. Поэтому $\Gamma_{Nc}(G/N) \subseteq \Gamma_{Nc}(G)$. Итак, $\bar{\mathbf{Q}}$ -замкнутость Γ доказана.

Пусть G_1 и G_2 — группы. Допустим, что $\Gamma_{Nc}(G_1) \cup \Gamma_{Nc}(G_2) \subset \Gamma_{Nc}(G_1 \times G_2)$. Это значит, что G_1 и G_2 не содержат (p, q) -подгрупп Шмидта, а $G_1 \times G_2$ содержит (p, q) -подгруппу Шмидта H . Пусть ρ_i — проекция H на G_i для $i = 1, 2$. Тогда $\text{Ker } \rho_1$ содержит силовскую p -подгруппу H . Аналогично $\text{Ker } \rho_2$ содержит силовскую p -подгруппу H . Следовательно, $\text{Ker } \rho_1 \cap \text{Ker } \rho_2 \neq 1$; противоречие. Итак, $\Gamma_{Nc} \bar{\mathbf{D}}_0$ -замкнута.

Доказательство $\bar{\mathbf{R}}_0$ -замкнутости Γ проводится так же, как в (1).

Докажем, что $\Gamma \bar{\mathbf{N}}_0$ -замкнута. Предположим противное. Пусть группа G — произведение своих нормальных подгрупп A и B — контрпример наименьшего порядка. Нетрудно заметить, что $V(\Gamma(G)) = V(\Gamma(A)) \cup V(\Gamma(B))$ и $E(\Gamma(A)) \cup E(\Gamma(B)) \subseteq E(\Gamma(G))$. Следовательно, в G имеется (p, q) -подгруппа Шмидта для некоторых простых p и q , а в A и B такой подгруппы нет.

Так как $\Gamma \bar{\mathbf{Q}}$ -замкнута, $\Gamma(G/N) = \Gamma(AN/N) \cup \Gamma(BN/N) \subseteq \Gamma(A) \cup \Gamma(B)$ для любой нормальной подгруппы N . Следовательно, $\Gamma(G/N)$ не содержит (p, q) -подгрупп Шмидта. Из $\bar{\mathbf{R}}_0$ -замкнутости Γ следует, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N .

Пусть S — (p, q) -подгруппа Шмидта G , и пусть P и Q — силовские p -подгруппа и q -подгруппа S соответственно. Известно, что $Q = \langle x \rangle$ — циклическая группа. Из $(p, q) \notin E(\Gamma(G/N))$ следует, что $P \leq S \cap N$. Согласно лемме 11.6 [17, гл. 3, § 11] найдутся силовские q -подгруппы Q_1, Q_2 и Q_3 групп G, A и B соответственно такие, что $Q_1 = Q_2Q_3$. Так как все силовские подгруппы сопряжены и $A, B \trianglelefteq G$, не теряя общности рассуждений, можно считать, что $Q \leq Q_1$. Заметим, что $A \cap NQ_1 = N(A \cap Q_1) = NQ_2 \trianglelefteq NQ_1$. Аналогично $NQ_3 \trianglelefteq NQ_1$. Из $S \leq NQ$ и нашего предположения следует, что $G = NQ_1$, $A = NQ_2$ и $B = NQ_3$.

Пусть N_1 — силовская p -подгруппа N , содержащая P . По лемме Фраттини $A = NN_A(N_1)$. Через Q'_2 обозначим силовскую q -подгруппу $N_A(N_1)$. Тогда $N_1Q'_2$ — p -замкнутая $\{p, q\}$ -группа, не содержащая (p, q) -подгруппы Шмидта. Следовательно, $N_1Q'_2$ нильпотентна. Значит, $Q'_2 \leq C_G(N_1)$. Аналогично доказывается, что если Q'_3 — силовская q -подгруппа $N_B(N_1)$, то $Q'_3 \leq C_G(N_1)$. Заметим, что $A = NQ'_2$ и $B = NQ'_3$. Тогда $G = NC_G(N_1)$. Заметим, что $x = yz$, где $z \in C_G(N_1)$ и y — q -элемент N . Так как $P^x = P^y = P$ и $P\langle y \rangle \leq N \leq A$ имеет нормальную силовскую p -подгруппу, но не имеет (p, q) -подгруппы Шмидта, $P\langle y \rangle$ нильпотентна. Значит, y и x действуют тождественно на P . Следовательно, S нильпотентна; противоречие.

Пусть $G \simeq A_5$ — знакопеременная группа степени 5. Заметим, что G не имеет $(3, 5)$ -подгруппы Шмидта. Согласно [19] существует точный неприводимый фраттиниев $\mathbb{F}_3G$ -модуль A . По известной теореме Гашюца [20] существует фраттиниево расширение $A \rightarrow R \twoheadrightarrow G$ такое, что $A \cong \Phi(R)$ и $R/\Phi(R) \simeq G$. Пусть K — подгруппа R такая, что $K/\Phi(R) \simeq Z_5$. Так как A — точный $\mathbb{F}_3G$ -модуль, K — нильпотентная группа с нормальной силовской 3-подгруппой. Тогда K имеет $(3, 5)$ -подгруппу Шмидта. Значит, $\Gamma(R/\Phi(R)) \subset \Gamma(R)$. Итак, Γ не $\overline{\mathbf{E}}_\Phi$ -замкнута.

(3) Пусть $\Gamma = \Gamma_s$. Известно, что $N_G(P)N/N = N_{G/N}(PN/N)$ для любой силовской подгруппы P и нормальной подгруппы N группы G . Пусть aN — q -элемент $N_{G/N}(PN/N) \setminus C_{G/N}(PN/N)$. Это означает, что найдется элемент $b \in P$ такой, что $[a, b] \notin N$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что a — q -элемент $N_G(P)$. Заметим, что $[a, b] \neq 1$. Итак, $a \in N_G(P) \setminus C_G(P)$. Следовательно, $\Gamma(G/N) \subseteq \Gamma(G)$. Значит, Γ $\overline{\mathbf{Q}}$ -замкнута.

Докажем $\overline{\mathbf{R}}_0$ -замкнутость Γ . Пусть N_1 и N_2 — нормальные подгруппы группы G такие, что $N_1 \cap N_2 = 1$. Ясно, что $\Gamma(G/N_1) \cup \Gamma(G/N_2) \subseteq \Gamma(G)$. Пусть P — силовская p -подгруппа G и $a \in N_G(P) \setminus C_G(P)$ — q -элемент G . Это значит, что $[a, b] \neq 1$ для некоторого $b \in P$. Предположим, что $aN_i \in C_{G/N_i}(PN_i/N_i)$ для $i = 1, 2$. Следовательно, $[a, b] \in N_1 \cap N_2 = 1$; противоречие. Значит, $\Gamma(G) \subseteq \Gamma(G/N_1) \cup \Gamma(G/N_2)$. Итак, $\Gamma(G/N_1) \cup \Gamma(G/N_2) = \Gamma(G)$, и Γ $\overline{\mathbf{R}}_0$ -замкнута.

Силовский граф симметрической группы степени 4 равен $(3, 2)$, а знакопеременной группы степени 4 — $(2, 3)$. Итак, Γ не $\overline{\mathbf{S}}$ -замкнута. $\square$

Проблема 2.8. Пусть $\overline{\mathbf{C}} \in \{\overline{\mathbf{N}}_0, \overline{\mathbf{E}}_\Phi\}$. Является ли Γ_s $\overline{\mathbf{C}}$ -замкнутой графовой функцией?

3. Арифметические графы классов групп

Введем понятие графа класса групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп и Γ — арифметическая графовая функция. Тогда *графом* $\Gamma(\mathfrak{X})$ *класса групп* $\mathfrak{X}$ будем называть $\bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \Gamma(G)$.

Отметим, что

$$\Gamma(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X} \cup \mathfrak{H}} \Gamma(G) = \bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \Gamma(G) \cup \bigcup_{G \in \mathfrak{H}} \Gamma(G) = \Gamma(\mathfrak{X}) \cup \Gamma(\mathfrak{H}).$$

Заметим, что $\Gamma(G)$ всегда имеет конечное множество вершин, а $\Gamma(\mathfrak{X})$ может иметь и бесконечное множество вершин. Но всякий подграф $\Gamma(\mathfrak{X})$ с конечным числом вершин всегда лежит в объединении конечного числа графов $\mathfrak{X}$ -групп.

Арифметическая графовая функция Γ определяет отношение эквивалентности $\sim$ на множестве $\mathcal{G}$ всех классов групп следующим образом. Два класса групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ назовем *эквивалентными*, если $\Gamma(\mathfrak{X}) = \Gamma(\mathfrak{H})$. Из $\mathfrak{X} \sim \mathfrak{H}$ следует, что $\mathfrak{X} \sim \mathfrak{H} \cup \mathfrak{X}$. Из этого следует, что каждый класс эквивалентности имеет наибольший по включению элемент.

Предложение 3.2. Пусть $\mathcal{K} \in \mathcal{G} / \sim$ и $\mathfrak{X} \in \mathcal{K}$. Тогда $\mathfrak{X}_\Gamma = (G \mid \Gamma(G) \subseteq \Gamma(\mathfrak{X}))$ — наибольший элемент $\mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{H} \in \mathcal{K}$ и $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{X}_\Gamma$. Тогда найдется группа $G \in \mathfrak{H} \setminus \mathfrak{X}_\Gamma$ такая, что $\Gamma(G) \subseteq \Gamma(\mathfrak{H}) = \Gamma(\mathfrak{X})$. Следовательно, $G \in \mathfrak{X}_\Gamma$; противоречие. $\square$

Теорема 3.3. Пусть $\mathbf{C} \in \{\mathbf{S}, \mathbf{Q}, \mathbf{D}_0, \mathbf{R}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{E}_\Phi\}$ и Γ — арифметическая графовая функция. Если Γ $\overline{\mathbf{C}}$ -замкнута, то $\mathbf{C}\mathfrak{X}_\Gamma = \mathfrak{X}_\Gamma$ для любого класса групп $\mathfrak{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{C} \in \{\mathbf{S}, \mathbf{Q}, \mathbf{D}_0, \mathbf{R}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{E}_\Phi\}$ и Γ — $\overline{\mathbf{C}}$ -замкнутая арифметическая графовая функция. Из определения операций $\mathbf{C}$ на классах групп и $\overline{\mathbf{C}}$ на арифметических графовых функциях следует, что графы всех групп из $\mathbf{C}\mathfrak{X}$ — объединения графов $\mathfrak{X}$ -групп или подграфы графов $\mathfrak{X}$ -групп. Следовательно, $\bigcup_{G \in \mathfrak{X}} \Gamma(G) = \bigcup_{G \in \mathbf{C}\mathfrak{X}} \Gamma(G)$. Таким образом, $\Gamma(\mathfrak{X}) = \Gamma(\mathbf{C}\mathfrak{X})$. Значит, $\mathbf{C}\mathfrak{X}_\Gamma \subseteq \mathfrak{X}_\Gamma$. Из определения операций $\mathbf{C}$ вытекает, что $\mathfrak{X}_\Gamma \subseteq \mathbf{C}\mathfrak{X}_\Gamma$. Итак, $\mathbf{C}\mathfrak{X}_\Gamma = \mathfrak{X}_\Gamma$. $\square$

Следующая лемма позволяет конструктивно определять $\Gamma_H(\mathfrak{F})$ для локальной формации $\mathfrak{F}$. Напомним [21, разд. 1.1], что если формация $\mathfrak{F}$ обладает по крайней мере одним локальным экраном, то пересечение всех таких локальных экранов этой формации называется *минимальным локальным экраном* $\mathfrak{F}$.

Лемма 3.4. Пусть f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Определим $\Gamma(\mathfrak{F})$ как ориентированный граф с $V(\Gamma(\mathfrak{F})) = \pi(\mathfrak{F})$ и $(p, q) \in E(\Gamma(\mathfrak{F}))$, если $q \in \pi(f(p))$. Тогда $\Gamma(\mathfrak{F}) = \Gamma_H(\mathfrak{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $V(\Gamma(\mathfrak{F})) = V(\Gamma_H(\mathfrak{F}))$. Согласно [16, гл. IV, разд. 3.10] $f(p) = \mathbf{QR}_0\{H/O_{p',p}(H) \mid H \in \mathfrak{F}\}$. Тогда из $q \in \pi(f(p))$ вытекает существование $\mathfrak{F}$ -группы G такой, что $q \in \pi(G/O_{p',p}(G))$. Следовательно, $\Gamma(\mathfrak{F}) \subseteq \Gamma_H(\mathfrak{F})$.

Предположим, что $(p, q) \in E(\Gamma_H(\mathfrak{F}))$. Тогда существует $\mathfrak{F}$ -группа G такая, что $q \in \pi(G/O_{p',p}(G))$. Из $G/O_{p',p}(G) \in f(p)$ получаем, что $q \in \pi(f(p))$. Значит, $\Gamma_H(\mathfrak{F}) \subseteq \Gamma(\mathfrak{F})$. Итак, $\Gamma(\mathfrak{F}) = \Gamma_H(\mathfrak{F})$. $\square$

Пусть π — множество простых чисел. Напомним, что $\mathfrak{G}_\pi$ — класс всех π -групп. Если $\pi = \emptyset$, то считаем, что $\mathfrak{G}_\pi$ — класс единичных групп.

Теорема 3.5. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Верны следующие утверждения:

- (1) $\mathfrak{F}_{\Gamma_H}$ — наследственная насыщенная формация Фиттинга, обладающая локальным экраном f , где $f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $\sigma(p) = \{q \mid (p, q) \in E(\Gamma_H(\mathfrak{F}))\}$; $f(p) = \emptyset$ в противном случае;
- (2) $\mathfrak{F}_{\Gamma_{N_c}}$ — наследственная разрешимо насыщенная $\check{S}$ -формация Фиттинга, обладающая композиционным экраном f , где $f(0) = \mathfrak{F}_{\Gamma_{N_c}}$, $f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $\sigma(p) = \{q \mid (p, q) \in E(\Gamma_{N_c}(\mathfrak{F}))\} \cup \{p\}$; $f(p) = \emptyset$ в противном случае;
- (3) $\mathfrak{F}_{\Gamma_s}$ — $\check{S}$ -формация, содержащая все нильпотентные $\pi(\mathfrak{F}_{\Gamma_s})$ -группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Как следует из теорем 2.7 и 3.3, $\mathfrak{F}_{\Gamma_H}$ является наследственной насыщенной формацией Фиттинга. Пусть $\mathfrak{F}^* = LF(f)$, где

$f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $f(p) = \emptyset$ в противном случае. По лемме 3.4 $\mathfrak{F}^* \subseteq \mathfrak{F}_{\Gamma_H}$. Допустим, что $\mathfrak{F}^* \subset \mathfrak{F}_{\Gamma_H}$ и $G \in \mathfrak{F}_{\Gamma_H} \setminus \mathfrak{F}^*$. Это значит, что найдется $p \in \pi(G)$ такое, что $\pi(G/O_{p',p}(G)) \not\subseteq \sigma(p)$. Следовательно, $\Gamma_H(G) \not\subseteq \Gamma_H(\mathfrak{F})$; противоречие. Итак, $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}_{\Gamma_H}$.

(2) Пусть $\Gamma = \Gamma_{N_G}$. Из теорем 2.7 и 3.3 следует, что $\mathfrak{F}_\Gamma$ — наследственная формация Фиттинга. Пусть G — минимальная не- $\mathfrak{F}_\Gamma$ -группа. Если G не является группой Шмидта, то $E(\Gamma(G)) \subseteq E(\Gamma(\mathfrak{F}))$. Следовательно, $V(\Gamma(G)) \not\subseteq V(\Gamma(\mathfrak{F}))$. Значит, $G \simeq Z_q$ для некоторого $q \in \mathbb{P}$. Итак, $\mathfrak{F}$ — $\check{S}$ -формация. Согласно следствию 2.4.3 из [15, разд. 2.4] всякая наследственная $\check{S}$ -формация разрешимо насыщенная.

Предположим, что $\mathfrak{F}$ — наследственная разрешимо насыщенная $\check{S}$ -формация и $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}_\Gamma$, т. е. $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_\Gamma$. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_\Gamma \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — минимальная не- $\mathfrak{F}$ -группа. Нетрудно убедиться, что G — группа Шмидта. Так как $\Gamma(\mathfrak{F}_\Gamma) = \Gamma(\mathfrak{F})$, то $\Phi(G) \neq 1$ и $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Заметим, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ и формация $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}$ насыщенная. Следовательно, $G \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$; противоречие. Итак, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\Gamma$.

(3) Пусть $\Gamma_s = \Gamma$ и $\mathfrak{F}_\Gamma = \mathfrak{F}$. Из теорем 2.7 и 3.3 следует, что $\mathfrak{F}$ — формация. Пусть G — нильпотентная $\pi(\mathfrak{F})$ -группа. Так как $V(\Gamma(G)) \subseteq \pi(\mathfrak{F}) = V(\Gamma(\mathfrak{F}))$ и $\Gamma(G)$ не содержит ребер, $\Gamma(G) \subseteq \Gamma(\mathfrak{F})$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть G — минимальная не- $\mathfrak{F}$ -группа, где $\mathfrak{F}_\Gamma = \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$, из $V(\Gamma(G)) \not\subseteq V(\Gamma(\mathfrak{F}))$ следует, что $G \simeq Z_q$ для некоторого $q \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Предположим, что $V(\Gamma(G)) \subseteq V(\Gamma(\mathfrak{F}))$. Тогда $E(\Gamma(G)) \not\subseteq E(\Gamma(\mathfrak{F}))$. Заметим, что $(p, q) \in \Gamma(G)$ тогда и только тогда, когда $(p, q) \in \Gamma(N_G(P))$ для некоторой силовой p -подгруппы P группы G .

Так как G — минимальная не- $\mathfrak{F}$ -группа, $G = N_G(P)$ для некоторой силовой подгруппы P группы G и найдется $q \in \pi(G)$ такое, что $(p, q) \in E(\Gamma(G)) \setminus E(\Gamma(\mathfrak{F}))$, т. е. в $G/C_G(P)$ найдется подгруппа $A/C_G(P) \simeq Z_q$. Заметим, что найдется q -элемент $x \in G$ такой, что $\langle xC_G(P) \rangle = A/C_G(P)$. Следовательно, $(p, q) \in E(\Gamma(P\langle x \rangle))$. Итак, $G = P\langle x \rangle$ и $\pi(G) = \{p, q\}$. Предположим, что в G найдется нильпотентная собственная подгруппа. Тогда в G имеется подгруппа Шмидта K . Так как все подгруппы группы G имеют нормальную силовскую p -подгруппу, $K = (p, q)$ -группа Шмидта и $K \notin \mathfrak{F}_\Gamma$; противоречие. Итак, G — группа Шмидта. Значит, $\mathfrak{F}_\Gamma$ — формация с условием Шеметкова. $\square$

Следствие 3.6. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная $\check{S}$ -формация. Тогда $\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из доказательства (2) теоремы 3.5, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\Gamma_{N_G}}$. Тогда $\mathfrak{F}$ $\mathbf{N}_0$ -замкнута по теоремам 2.7 и 3.3. $\square$

4. Классы групп, распознаваемые графами

Данный раздел посвящен решению проблемы 1.5.

Теорема 4.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация и $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Формация $\mathfrak{F}$ распознается Γ_p тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathfrak{F}$ распознается Γ_p . Из наследственности $\mathfrak{F}$ следует, что $Z_p \in \mathfrak{F}$ для всех $p \in \pi$. Пусть H — π -группа. Тогда H — π_1 -группа для некоторого конечного подмножества $\pi_1 \subseteq \pi$. Пусть $G = \times_{p \in \pi_1} Z_p$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$ и $\Gamma_p(G)$ — полный граф на множестве вершин π_1 . Следовательно, $\Gamma_p(G) = \Gamma_p(G \times H)$. По предположению $G \times H \in \mathfrak{F}$. Значит, $H \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi$.

Предположим, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_\pi$. Ясно, что $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу G , для которой $V(\Gamma_p(G)) \subseteq \pi$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ распознается Γ_p . $\square$

Важную роль в данной работе играет

Теорема 4.2. Пусть Γ — $\overline{\mathbf{D}}_0$ -замкнутая арифметическая графовая функция и $\mathfrak{X} = \{\mathbf{D}_0, \mathbf{DM}\}$ -замкнутый класс групп. Класс групп $\mathfrak{X}$ распознается Γ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_\Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что Γ распознает $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}_\Gamma$. Так как $\Gamma(\mathfrak{X}) = \Gamma(\mathfrak{X}_\Gamma)$, для всякой $G \in \mathfrak{X}_\Gamma$ найдутся $\mathfrak{X}$ -группы $G_1, \dots, G_n$ такие, что $\Gamma(G) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \Gamma(G_i)$. Отметим, что $G_1 \times \dots \times G_n \in \mathbf{D}_0\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ и $\Gamma(G_1 \times \dots \times G_n) = \Gamma(G \times G_1 \times \dots \times G_n)$. Следовательно, $G \times G_1 \times \dots \times G_n \in \mathfrak{X}$. Значит, $G \in \mathbf{DM}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Итак, $\mathfrak{X}_\Gamma \subseteq \mathfrak{X}$. Из определения $\mathfrak{X}_\Gamma$ следует, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_\Gamma$. Значит, $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_\Gamma$; противоречие.

Так как $\mathfrak{X}_\Gamma$ — наибольший класс групп такой, что $\Gamma(\mathfrak{X}_\Gamma) = \Gamma(\mathfrak{X})$, то $\mathfrak{X}_\Gamma$ содержит всякую группу G , для которой $\Gamma(G) \subseteq \Gamma(\mathfrak{X}_\Gamma)$. Следовательно, Γ распознает $\mathfrak{X}_\Gamma$. $\square$

Теорема 4.3. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и $\sigma(p) = \{q \mid (p, q) \in E(\Gamma_H(\mathfrak{F}))\}$. Формация $\mathfrak{F}$ распознается Γ_H тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F} = LF(f)$, где $f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $f(p) = \emptyset$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из теорем 3.5 и 4.2. $\square$

Теорема 4.4. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ и $\sigma(p) = \{q \mid (p, q) \in E(\Gamma_{N_c}(\mathfrak{F}))\} \cup \{p\}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) $\mathfrak{F}$ — наследственная разрешимо насыщенная $\check{S}$ -формация Фиттинга, обладающая композиционным экраном f , где $f(0) = \mathfrak{F}$, $f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $f(p) = \emptyset$ в противном случае;
- (2) π -группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $N_G(P)/C_G(P)$ принадлежит $\mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ для любой p -подгруппы P группы G и для любого $p \in \pi$;
- (3) $\mathfrak{F}$ распознается Γ_{N_c} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из предложения 2.3, утверждение (2) эквивалентно тому, что $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу G , для которой $\Gamma_{N_c}(G) \subseteq \Gamma_{N_c}(\mathfrak{F})$. Стало быть, (2) эквивалентно тому, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\Gamma_{N_c}}$. Эквивалентность (1), (2) и (3) следует из теорем 3.5 и 4.2. $\square$

Из теоремы 4.4 вытекает известное обобщение теоремы Фробениуса о p -нильпотентных группах.

Следствие 4.5 [22]. Пусть $\mathfrak{F} = LF(F)$ — наследственная насыщенная формация, где F — полный локальный экран $\mathfrak{F}$, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $\pi(p) = \pi(F(p))$ для любого $p \in \pi$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $\mathfrak{F}$ — $\check{S}$ -формация;
- (2) π -группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $N_G(P)/C_G(P)$ принадлежит $\mathfrak{G}_{\pi(p)}$ для любой p -подгруппы P группы G и для любого $p \in \pi$.

Согласно теореме 2.7 формации, распознаваемые Γ_s , не обязательно наследственные. Как следует из теоремы 4.2, если наследственная формация $\mathfrak{F}$ распознается Γ_s , то $\mathfrak{F}_{\Gamma_s}$ — наследственная формация.

Теорема 4.6. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная формация. Если $\mathfrak{F}$ распознается Γ_s , то $\Gamma_s(\mathfrak{F})$ — неориентированный граф.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma = \Gamma_s$ и $(p, q) \in E(\Gamma(\mathfrak{F}))$. Тогда найдется группа $G \in \mathfrak{F}$ такая, что $(p, q) \in E(\Gamma(G))$. Согласно теореме 10.3В в [16] для циклической группы Z_q существует точный неприводимый Z_q -модуль T_p над полем $\mathbb{F}_p$, состоящим из p элементов. Пусть $H(p, q) = T_p \rtimes Z_q$. Тогда $\Gamma(H(p, q)) = (p, q)$. Из $\Gamma(G) = \Gamma(G \times H(p, q))$ следует, что $G \times H(p, q) \in \mathfrak{F}$. Итак, $H(p, q) \in \mathfrak{F}$.

По теореме 10.3В в [16] для группы $H(p, q)$ найдется точный неприводимый $H(p, q)$ -модуль T_q над полем $\mathbb{F}_q$. Пусть $G(p, q) = T_q \rtimes H(p, q)$. Заметим, что силовская q -подгруппа $G(p, q)$ является абнормальной максимальной подгруппой $G(p, q)$. Значит, $\Gamma(G(p, q)) = \Gamma(H(p, q))$. Следовательно, $G(p, q) \in \mathfrak{F}$. Так как $T_q T_p < G(p, q)$, то $T_q T_p \in \mathfrak{F}$. Из $T_q \trianglelefteq T_q T_p$ и $C_{T_q T_p}(T_q) = T_q$ следует, что $(q, p) \in E(\Gamma(\mathfrak{F}))$. Значит, если наследственная формация $\mathfrak{F}$ распознается Γ , то $\Gamma(\mathfrak{F})$ — неориентированный граф. $\square$

Напомним [23], что локальная формация $\mathfrak{F} = LF(F)$, где $F(p) = \mathfrak{S}_{\pi(F(p))}$ для $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $F(p) = \emptyset$ в противном случае, называется *покрывающей формацией разрешимых групп*, если $p \in \pi(F(p))$ и $p \in \pi(F(q))$ всегда влечет $q \in \pi(F(p))$ для всех $p, q \in \pi(\mathfrak{F})$. Как показано в [23], всякая такая формация $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, содержащая всякую разрешимую группу G , все нормализаторы силовских подгрупп которой принадлежат $\mathfrak{F}$.

Теорема 4.7. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп такой, что $\Gamma_s(\mathfrak{X})$ — неориентированный граф. Тогда $\mathfrak{X}_{\Gamma_s} \cap \mathfrak{S}$ — покрывающая формация разрешимых групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma = \Gamma_s$. Заметим, что $\Gamma(\mathfrak{X}_{\Gamma} \cap \mathfrak{S}) = \Gamma(\mathfrak{X}_{\Gamma})$. Докажем, что $\mathfrak{X}_{\Gamma_s} \cap \mathfrak{S}$ — наследственная формация. Предположим, что формация $\mathfrak{X}_{\Gamma} \cap \mathfrak{S}$ не является наследственной. Это значит, что найдутся группа $G \in \mathfrak{X}_{\Gamma} \cap \mathfrak{S}$ и ее подгруппа H такие, что $(p, q) \in E(\Gamma(H))$ и $(p, q) \notin E(\Gamma(\mathfrak{X}_{\Gamma}))$. Отметим, что $(q, p) \notin E(\Gamma(\mathfrak{X}_{\Gamma}))$.

Пусть P — силовская p -подгруппа H . Тогда найдется холлова $\{p, q\}$ -подгруппа H_1 группы H , содержащая холлову $\{p, q\}$ -подгруппу группы $N_H(P)$. Заметим, что H_1 — ненильпотентная группа. Пусть G_1 — холлова $\{p, q\}$ -подгруппа G , содержащая H_1 . Так как $(p, q) \notin E(\Gamma(G))$ и $(q, p) \notin E(\Gamma(G))$, то $\Gamma(G_1)$ — две изолированные вершины p и q .

Предположим, что существуют ненильпотентные бипримарные группы K такие, что $\Gamma(K)$ — две изолированные вершины p и q . Выберем среди них группу наименьшего порядка K . Так как класс $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп — насыщенная формация и $\Gamma \mathbf{Q}$ -замкнута, в K имеется единственная минимальная нормальная подгруппа $N \not\leq \Phi(G)$. Поскольку группа K разрешима, не теряя общности рассуждений, можно считать, что N — p -группа. Тогда $K = N \rtimes M$, где $M \in \mathfrak{N}$. Пусть P — силовская p -подгруппа, а Q — силовская q -подгруппа M . Тогда NP — нормальная подгруппа K . Так как K ненильпотентна, то $Q \not\leq C_K(NP)$. Итак, $\Gamma(K) = (p, q)$; противоречие.

Стало быть, G_1 нильпотентна и содержит ненильпотентную подгруппу H_1 ; противоречие. Следовательно, $\mathfrak{X}_{\Gamma} \cap \mathfrak{S}$ наследственная.

Если $G \in \mathfrak{X}_{\Gamma} \cap \mathfrak{S}$, то все ее подгруппы Шмидта принадлежат $\mathfrak{X}_{\Gamma} \cap \mathfrak{S}$. Докажем обратное утверждение для разрешимой группы G . Предположим, что оно неверно. Тогда найдутся такие простые p и q , что G не содержит (p, q) -групп Шмидта, но $q \in \pi(N_G(P)/C_G(P))$ для силовской p -подгруппы P группы G . Отметим, что из $q \in \pi(N_G(P)/C_G(P))$ следует, что в $N_G(P)$, а значит, и в G

найдется (p, q) -группа Шмидта; противоречие. Следовательно, $(\mathfrak{X}_\Gamma \cap \mathfrak{S})_{\Gamma_{N_c}} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{X}_\Gamma \cap \mathfrak{S}$. Итак, $\mathfrak{X}_\Gamma \cap \mathfrak{S}$ — наследственная насыщенная $\check{S}$ -формация в классе всех разрешимых групп по теореме 4.4.

Известно [15, разд. 2.4], что $\mathfrak{X}_\Gamma \cap \mathfrak{S}$ имеет такой локальный экран F , что $p \in \pi(F(p))$ и $F(p) = \mathfrak{S}_{\pi(F(p))}$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{X}_\Gamma \cap \mathfrak{S})$ и $F(p) = \emptyset$ в противном случае. Так как $\Gamma(\mathfrak{X})$ — неориентированный граф, (p, q) -группа Шмидта принадлежит $\mathfrak{X}_{\Gamma_s} \cap \mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда всякая (q, p) -группа Шмидта также принадлежит $\mathfrak{X}_\Gamma \cap \mathfrak{S}$. Это значит, что $q \in \pi(F(p))$ всегда влечет $p \in \pi(F(q))$. Итак, $\mathfrak{X}_\Gamma \cap \mathfrak{S}$ — покрывающая формация разрешимых групп. $\square$

Следствие 4.8. *Наследственная формация $\mathfrak{F}$ разрешимых групп распознается Γ_s в классе разрешимых групп тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ — покрывающая формация в классе разрешимых групп.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как доказательство теоремы 4.6 опирается на разрешимые группы, если $\mathfrak{F}$ распознается Γ_s в классе всех разрешимых групп, то $\Gamma_s(\mathfrak{F})$ неориентированный. По аналогии с теоремой 4.2 можно показать, что распознаваемость $\mathfrak{F}$ в классе разрешимых групп эквивалентна $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\Gamma_s} \cap \mathfrak{S}$. Теперь следствие 4.8 вытекает из теоремы 4.7. $\square$

Проблема 4.9. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная разрешимо насыщенная $\check{S}$ -формация и $\Gamma_s(\mathfrak{F})$ — неориентированный граф. Распознается ли $\mathfrak{F}$ графовой функцией Γ_s ?*

ПРИМЕР 4.10. (1) Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$, где $f(2) = \mathfrak{S}_{\{3\}}$, $f(3) = \mathfrak{S}_{\{2\}}$ и $f(p) = \emptyset$ в противном случае. Тогда по теореме 4.3 $\mathfrak{F}$ распознается Γ_H . Докажем, что $\mathfrak{F}$ не распознается Γ_{N_c} . Предположим противное. Заметим, что $(2, 3)$ - и $(3, 2)$ -подгруппы Шмидта принадлежат $\mathfrak{F}$. Тогда и $S_4 \in \mathfrak{F}$; противоречие. Аналогично можно доказать, что $\mathfrak{F}$ не распознается Γ_s .

(2) Пусть $\mathfrak{F} = (A_5)_{\Gamma_{N_c}}$. Тогда $\mathfrak{F}$ распознается Γ_{N_c} по теореме 4.2 и, как следует из доказательства (2) теоремы 2.7, $\mathfrak{F}$ ненасыщенна. Так как все формации, распознаваемые Γ_H , насыщены, $\mathfrak{F}$ не распознается Γ_H .

(3) Пусть $\mathfrak{F} = (S_4)_{\Gamma_s}$. Тогда $\mathfrak{F}$ распознается Γ_s по теореме 4.2 и, как следует из доказательства (3) теоремы 2.7, $\mathfrak{F}$ ненаследственна. Так как все формации, распознающиеся Γ_H и Γ_{N_c} наследственны, то $\mathfrak{F}$ не распознается ни Γ_H , ни Γ_{N_c} .

5. Арифметические графовые функции и холловы подгруппы

В данном разделе устанавливаются некоторые признаки существования нормальных холловых подгрупп в группе с помощью арифметических графов.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Если $\pi_1 \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, $V(\Gamma_H(\mathfrak{F})) = \pi_1 \cup \pi_2$ и граф $\Gamma_H(\mathfrak{F})$ не имеет ребер, выходящих из π_2 в π_1 , то всякая $\mathfrak{F}$ -группа имеет нормальную холлову π_1 -подгруппу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_{\Gamma_H}$. Пусть $\pi_1 = \pi$, группа G — контрпример минимального порядка и N — минимальная нормальная подгруппа G .

Предположим, что N — π -группа. Так как $G/N \in \mathfrak{F}$, в G/N имеется нормальная холлова π -подгруппа H/N . Следовательно, H — нормальная холлова π -подгруппа G ; противоречие.

Допустим, что N не является π -группой. Поскольку $C_G(N) \geq O_{p',p}(G)$ для всех $p \in \pi(N)$, из определения $\Gamma_H(\mathfrak{F})$ следует, что $\pi(G/C_G(N)) \cap \pi = \emptyset$. Значит, $C_G(N)$ содержит все π -элементы G .

Если $C_G(N) < G$, то найдется холлова π -подгруппа $H \trianglelefteq C_G(N) \trianglelefteq G$. Следовательно, H — нормальная холлова π -подгруппа G ; противоречие.

Предположим, что $C_G(N) = G$. Тогда N — элементарная абелева p -подгруппа G для некоторого $p \notin \pi$. Так как $G/N \in \mathfrak{F}$, в G/N имеется нормальная холлова π -подгруппа HN/N . Заметим, что N — нормальная холлова p -подгруппа $HN \trianglelefteq G$. По теореме Шура — Цассенхауза N имеет дополнение K в HN . Поскольку $C_{HN}(N) = HN$, то K — нормальная холлова π -подгруппа G ; заключительное противоречие. $\square$

Следствие 5.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп, $V(\Gamma_H(\mathfrak{F})) = \pi_1 \cup \pi_2$, где $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ и между π_1 и π_2 нет ребер в $\Gamma_H(\mathfrak{F})$. Тогда всякая группа из $\mathfrak{F}$ есть прямое произведение холловых π_1 - и π_2 -подгрупп.

ПРИМЕР 5.3. Аналог теоремы 5.1 для Γ_{Nc} неверен. В знакопеременной группе степени 5 отсутствуют $(2, 5)$ - и $(3, 5)$ -подгруппы Шмидта. Очевидно, что эта группа не имеет нормальной силовой 5-подгруппы.

Тем не менее аналог следствия 5.2 верен и для Γ_{Nc} , как показывает следующая теорема, при доказательстве которой используются результаты из [5], полученные с помощью классификации конечных простых групп.

Теорема 5.4. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп, $\sigma = \{\pi_i \mid i \in I\}$ — разбиение $V(\Gamma_{Nc}(\mathfrak{F}))$ на попарно не пересекающиеся множества такое, что между π_i и π_j нет ребер для $i \neq j$. Тогда всякая $\mathfrak{F}$ -группа — прямое произведение холловых π_k -подгрупп, где $k \in \{i \in I \mid \pi(G) \cap \pi_i \neq \emptyset\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что достаточно доказать эту теорему только для $\mathfrak{F}_{\Gamma_{Nc}}$ и $\sigma = \{\pi_1, \pi_2\}$. Предположим, что теорема неверна. Пусть группа G — контрпример наименьшего порядка и N — минимальная нормальная подгруппа G . Рассмотрим два случая.

(1) Предположим, что N — абелева p -группа. Ясно, что $N \neq G$. Так как Γ_{Nc} $\mathbf{Q}$ -замкнута, $G/N = H_1/N \times H_2/N$, где $\pi(H_i/N) \subseteq \pi_i$ для $i = 1, 2$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $p \in \pi_1$. Тогда H_1 — нормальная холлова π_1 -подгруппа G . Заметим, что N — нормальная холлова p -подгруппа H_2 . По теореме Шура — Цассенхауза N имеет дополнение F в H_2 . Тогда F — холлова π_2 -подгруппа в H_2 и G .

Докажем, что $F \trianglelefteq G$. Пусть R — силовая r -подгруппа F и $\mathcal{T}$ — множество силовских q -подгрупп H_1 . Заметим, что $\pi(|\mathcal{T}|) \subseteq \pi_1$. Так как $H_1 \trianglelefteq G$, то R действует на $\mathcal{T}$ сопряжением и длина любой ее орбиты есть некоторая неотрицательная степень r . Из $(r, |\mathcal{T}|) = 1$ следует, что R имеет неподвижную точку на $\mathcal{T}$. Значит, $R \leq N_G(Q)$ для некоторой силовой q -подгруппы Q группы G . Так как $q \in \pi_1$ и $r \in \pi_2$, то $R \leq C_G(Q)$ по предположению теоремы. По аналогии можно показать, что для любого $q \in \pi_1$ найдется силовая q -подгруппа Q группы H_1 такая, что $R \leq C_G(Q)$. Следовательно, $R \leq C_G(H_1)$. Итак, $R \leq C_G(H_1)$ для любой силовой подгруппы R группы F . Значит, $F \leq C_G(H_1)$. Итак, $G = F \times H_1$; противоречие.

(2) Предположим, что N неабелева. В [5] доказано, что силовский граф любой почти простой группы H связан, т. е. если $\{p, q\} \subseteq \pi(H)$, то найдутся простые числа $p = p_0, \dots, p_n = q$ такие, что или $(p_{i-1}, p_i) \in E(\Gamma_s(H))$, или $(p_i, p_{i-1}) \in E(\Gamma_s(H))$ для любых $i = 1, \dots, n$. Из $\Gamma_s(G) \subseteq \Gamma_{Nc}(G)$ следует, что $G \neq N$. По предположению $G/N = H_1N/N \times H_2N/N$. Предположим, что $\pi(N) \cap \pi_i \neq \emptyset$ для $i = 1, 2$. Так как $\Gamma_{Nc}(N)$ связан и $\Gamma_{Nc}(NH_i) \subseteq \Gamma_{Nc}(G)$ для

$i = 1, 2$, то π_1 и π_2 связаны в $\Gamma_{Nc}(G)$; противоречие. Значит, N является или π_1 -группой, или π_2 -группой. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям из случая (1). $\square$

Следствие 5.5. Пусть G — группа, $V(\Gamma_{Nc}(G)) = \pi_1 \cup \pi_2$, где $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, и между π_1 и π_2 нет ребер. Тогда G — прямое произведение холловых π_1 - и π_2 -подгрупп.

Следующий результат вытекает непосредственно из первой части доказательства теоремы 5.4.

Следствие 5.6. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс разрешимых групп, $V(\Gamma_s(\mathfrak{F})) = \pi_1 \cup \pi_2$, где $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$, и между π_1 и π_2 нет ребер. Тогда всякая $\mathfrak{F}$ -группа есть прямое произведение холловых π_1 - и π_2 -подгрупп.

Проблема 5.7. Можно ли убрать условие разрешимости группы G в следствии 5.6?

6. Арифметические графовые функции и разрешимость групп

В дальнейшем потребуется описание N -критических графов минимальных простых неабелевых групп. Все минимальные простые группы были описаны Томпсоном (см. [24, гл. II, разд. 7.5]). Список этих групп содержит $PSL(2, 2^p)$, где p — простое число; $PSL(2, 3^p)$ и $Sz(2^p)$, где p — нечетное простое число; $PSL(2, p)$, где $p > 5$ — простое число и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$; $PSL(3, 3)$.

Предложение 6.1. Верны следующие утверждения.

(а) Пусть p — простое число. Тогда $V(\Gamma_{Nc}(PSL(2, 2^p))) = \pi(2(2^{2p} - 1))$ и

$$E(\Gamma_{Nc}(PSL(2, 2^p))) = \{(2, q) \mid q \in \pi(2^p - 1)\} \cup \{(q, 2) \mid q \in \pi(2^{2p} - 1)\}.$$

(б) Пусть p — нечетное простое число. Тогда

$$V(\Gamma_{Nc}(PSL(2, 3^p))) = \pi(3(3^{2p} - 1)),$$

$$E(\Gamma_{Nc}(PSL(2, 3^p))) = \{(3, q) \mid q \in \pi(3^p - 1) \setminus \{2\}\} \cup \{(2, 3)\} \cup \{(q, 2) \mid q \in \pi(3^{2p} - 1) \setminus \{2\}\}.$$

(с) Пусть $p > 5$ — нечетное простое число такое, что $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$. Тогда $V(\Gamma_{Nc}(PSL(2, p))) = \pi(p(p^2 - 1))$ и

$$E(\Gamma_{Nc}(PSL(2, p))) = \left\{ (p, q) \mid q \in \pi\left(\frac{p-1}{2}\right) \right\} \cup \{(2, 3)\} \cup \{(q, 2) \mid q \in \pi(p^2 - 1) \setminus \{2\}\}.$$

(д) Пусть p — нечетное простое число. Тогда

$$V(\Gamma_{Nc}(Sz(2^p))) = \pi(2(2^{2p} + 1)(2^p - 1)),$$

$$E(\Gamma_{Nc}(Sz(2^p))) = \{(2, q) \mid q \in \pi(2^p - 1)\} \cup \{(q, 2) \mid q \in \pi((2^p - 1)(2^{2p} + 1))\}.$$

(е) Для группы $PSL(3, 3)$ верно $V(\Gamma_{Nc}(PSL(3, 3))) = \{2, 3, 13\}$ и

$$E(\Gamma_{Nc}(PSL(3, 3))) = \{(2, 3), (3, 2), (13, 3)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диксоном (см. [24, гл. II, разд. 8.27]) установлено, что всякая подгруппа $PSL(2, p^n)$ есть (с точностью до изоморфизма) одна из следующих групп: (1) элементарная абелева p -группа; (2) циклическая группа Z_m

порядка m , где m — делитель $(p^n \pm 1)/d$ и $d = (p^n - 1, 2)$; (3) группа диэдра порядка $2m$, где m определено в (1); (4) знакопеременная группа A_4 , где $p > 2$ или $p = 2$ и $n \equiv 0 \pmod{2}$; (5) симметрическая группа S_4 , если $p^{2n} \equiv 1 \pmod{16}$; (6) знакопеременная группа A_5 , если $p = 5$ или $p^{2n} \equiv 1 \pmod{5}$; (7) полупрямое произведение элементарной абелевой p -группы порядка p^m на циклическую группу порядка k , где k — делитель $p^m - 1$ и $(p^n - 1)/d$, где $d = (p^n - 1, 2)$; (8) группа $PSL(2, p^m)$, где m — делитель n , и группа $PGL(2, p^m)$, где $2m$ — делитель n .

Напомним, что $|PSL(2, p^\alpha)| = (p^\alpha - 1)p^\alpha(p^\alpha + 1)/(2, p - 1)$. Отсюда нетрудно видеть, что $V(\Gamma_{Nc}(PSL(2, p^\alpha))) = \pi(p(p^{2\alpha} - 1))$ для случаев (а)–(с). Отметим, что для этих случаев подгруппы типов (6) и (8) не являются собственными, а подгруппы типа (1) и (2) не содержат групп Шмидта. Заметим, что группа диэдра порядка $2m$ содержит только подгруппы Шмидта типа $(q, 2)$, где q — нечетный простой делитель m (этими подгруппами являются группы диэдра порядка $2q$). Очевидно, что $E(\Gamma_{Nc}(S_4)) = \{(2, 3), (3, 2)\}$ и $E(\Gamma_{Nc}(A_4)) = \{(2, 3)\}$. Пусть $H = N \rtimes C$ — подгруппа типа (7). Тогда $C_H(N) = N$. Это означает, что подгруппы типа (7) дают подгруппы Шмидта типов (p, q) , где $q \in \pi((p^\alpha - 1)/(2, p^\alpha - 1))$.

Согласно Сузуки [25] всякая подгруппа $Sz(q)$, где $q = 2^p$, изоморфна подгруппе одной из следующих групп: (1) группа Фробениуса H порядка $q^2(q - 1)$, где $H = QK$, $Q \trianglelefteq H$, $Q \in \text{Syl}_q(H)$ и K — циклическая группа порядка $q - 1$; (2) группа диэдра порядка $2(q - 1)$; (3) циклическая группа A_i ($i = 1, 2$) порядка $q \pm r + 1$, где $r^2 = 2q$; (4) группа $B_i = N_G(A_i)$ порядка $4(q \pm r + 1)$; (5) $Sz(s)$, где q — степень s . Напомним, что $|Sz(2^p)| = 2^{2p}(2^{2p} + 1)(2^p - 1)$. Значит, $V(\Gamma_{Nc}(Sz(2^p))) = \pi(2(2^{2p} + 1)(2^p - 1))$. Рассуждая по аналогии, получим, что п. (1) дает группы Шмидта типа $(2, r)$, где $r \in \pi(2^p - 1)$, а п. (2) — $(r, 2)$, где $r \in \pi(2^p - 1)$. П. (3) не дает групп Шмидта, а подгруппы из п. (5) не являются собственными при любом простом p . Подгруппы типа (4) дают подгруппы Шмидта типов $(r, 2)$, где $r \in \pi((2^p + 1 + 2^{(p+1)/2})(2^p + 1 - 2^{(p+1)/2})) = \pi(2^{2p} + 1)$.

Напомним, что $|PSL(3, 3)| = 5616 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$. Значит, $V(\Gamma_{Nc}(PSL(3, 3))) = \{2, 3, 13\}$. Перебором подгрупп можно убедиться, что все подгруппы Шмидта группы $PSL(3, 3)$ имеют один из следующих типов: $(2, 3)$, $(3, 2)$ и $(13, 3)$. $\square$

Напомним, что группа называется *дисперсивной*, если найдется линейный порядок φ на $\pi(G)$ такой, что если $\pi(G) = \{p_1, \dots, p_n\}$, причем $p_i \leq_\varphi p_j$ для $i < j$, то G имеет нормальные холловы $\{p_1, \dots, p_i\}$ -подгруппы для всех $i \leq n$.

Теорема 6.2. Пусть G — группа.

(а) Если все циклы $\Gamma_{Nc}(G)$, содержащие вершину 2, имеют длину, большую трех, то G разрешима.

(б) Если $\Gamma_{Nc}(G)$ не содержит циклов, то G дисперсивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma = \Gamma_{Nc}$. (а) Заметим, что если G неразрешима, то она содержит минимальную неразрешимую группу H . Известно, что $H/\Phi(H)$ — минимальная простая неабелева группа.

Итак, если группа G неразрешима, то $\Gamma(H) \subseteq \Gamma(G)$ для некоторой минимальной простой неабелевой группы H .

Пусть $H \simeq PSL(2, 2^p)$, где p — простое число. Тогда все циклы $\Gamma(H)$ суть $\{(2, q), (q, 2)\}$, где $q \in \pi(2^p - 1)$.

Пусть $H \simeq PSL(2, 3^p)$, где p — нечетное простое число. Так как p нечетно, $3^p - 1 \equiv 2 \pmod{4}$. Значит, $|\pi(3^p - 1)| > 1$. Следовательно, $\Gamma(H)$ содержит только следующие циклы: $\{(2, 3), (3, q), (q, 2)\}$, где $q \in \pi(3^p - 1) \setminus \{2\}$.

Пусть $H \simeq PSL(2, p)$, где $p > 5$ — простое число такое, что $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$. Тогда 3 делит $p^2 - 1$. В $\Gamma(H)$ имеется единственный цикл, а именно $\{(2, 3), (3, 2)\}$.

Пусть $H \simeq Sz(2^p)$, где p — нечетное простое число. Тогда все циклы $\Gamma(H)$ суть $\{(2, q), (q, 2)\}$, где $q \in \pi(2^p - 1)$.

Пусть $H \simeq PSL(3, 3)$. Тогда в $\Gamma(H)$ имеется один цикл $\{(2, 3), (3, 2)\}$.

Как следует из доказанного выше, $\Gamma(H) \not\subseteq \Gamma(G)$ для любой минимальной простой неабелевой группы H . Значит, G разрешима.

(b) Предположим, что теорема неверна, и пусть группа G — контрпример минимального порядка. Из п. (a) следует, что G разрешима. Так как $\Gamma(G)$ не содержит циклов, найдется $p \in \pi(G) = V(\Gamma(G))$ такое, что в него не входит ни одного ребра. Рассмотрим силовскую p -подгруппу P группы G . Поскольку G разрешима, для любого $q \in \pi(G)$ найдется холлова $\{p, q\}$ -подгруппа Q группы G , содержащая P . Заметим, что $\Gamma(Q)$ есть две изолированные вершины или стрелка из p в q . В первом случае Q нильпотентна и $Q \leq N_G(P)$. Во втором случае Q q -нильпотентна и снова $Q \leq N_G(P)$. Итак, $P \trianglelefteq G$.

Так как $\Gamma(G/P) \subseteq \Gamma(G)$ и $|G/P| < |G|$, то G/P ϕ -дисперсивна для некоторого линейного порядка ϕ на $\pi(G/P)$. Если продолжим ϕ до $\pi(G)$ таким образом, что p будет являться наименьшим элементом $\pi(G)$, то G будет ϕ -дисперсивной для этого порядка ϕ на $\pi(G)$. $\square$

Следствие 6.3 (Хоукс [13]). *Если $\Gamma_H(G)$ не имеет циклов, то группа G дисперсивна.*

7. Арифметические графы и трижды факторизуемые группы

Группа G называется *трижды факторизуемой*, если в ней найдутся подгруппы A, B, C такие, что $G = AB = BC = CA$. Свойства таких групп во многом зависят от свойств перемножаемых подгрупп. В [26] Кегель показал, что группа G нильпотентна в случае нильпотентности подгрупп A, B и C . Л. С. Казарин [27], используя классификацию конечных простых групп, установил разрешимость таких групп при условии разрешимости A, B и C . В классе всех разрешимых групп в [28] были конструктивно описаны наследственные насыщенные формации, замкнутые относительно тройных факторизаций. Заметим, что трижды факторизуемость группы G возникает естественным образом, если G имеет три подгруппы A, B и C , индексы которых попарно взаимно просты в G .

Теорема 7.1. *Пусть $G = AB = BC = CA$, где A, B, C — разрешимые подгруппы G . Тогда*

- (1) $\Gamma_{Nc}(A) \cup \Gamma_{Nc}(B) \cup \Gamma_{Nc}(C) = \Gamma_{Nc}(G)$;
- (2) если индексы A, B, C в G попарно взаимно просты, то $\Gamma_H(A) \cup \Gamma_H(B) \cup \Gamma_H(C) = \Gamma_H(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Gamma \in \{\Gamma_H, \Gamma_{Nc}\}$. Предположим, что теорема неверна, и пусть группа G — контрпример наименьшего порядка. Из теоремы 2.7 следует, что $\Gamma(A) \cup \Gamma(B) \cup \Gamma(C) \subseteq \Gamma(G)$. Предположим, что $\Gamma(G) \not\subseteq \Gamma(A) \cup \Gamma(B) \cup \Gamma(C)$. Заметим, что $V(\Gamma(A) \cup \Gamma(B) \cup \Gamma(C)) = V(\Gamma(G))$. Тогда найдется $(p, q) \in E(\Gamma(G))$ такое, что $(p, q) \notin E(\Gamma(A) \cup \Gamma(B) \cup \Gamma(C))$.

- (1) Пусть $\Gamma = \Gamma_{Nc}$. Согласно теореме 1 из [26] G разрешима. По п. (3) леммы 1 из [29] найдутся такие холловы $\{p, q\}$ -подгруппы A_1, B_1, C_1 и G_1 групп

A, B, C и G соответственно и $g \in G$, что $G_1 = A_1 B_1 = A_1 C_1^g = B_1 C_1^g$. Нетрудно заметить, что $(p, q) \in E(\Gamma(G_1))$, $\Gamma(C_1) = \Gamma(C_1^g)$ и $(p, q) \notin \Gamma(A_1) \cup \Gamma(B_1) \cup \Gamma(C_1)$. В силу нашего предположения можно считать, что $G_1 = G$, $A_1 = A$, $B_1 = B$ и $C_1^g = C$. Как следует из теоремы 6.2, A, B и C имеют нормальную силовскую q -подгруппу. Следовательно, G также имеет нормальную силовскую q -подгруппу по следствию 1 из [29]. Значит, G не может иметь (p, q) -подгрупп Шмидта; противоречие.

(2) Пусть $\Gamma = \Gamma_H$ и индексы A, B, C в G попарно взаимно просты. По теореме Виландта [17, гл. I, § 4] G разрешима. Заметим, что для любого $p \in \pi(G)$ по крайней мере две подгруппы из A, B и C содержат силовскую p -подгруппу G . Следовательно, для любого множества $\{p, q\} \subseteq \pi(G)$ по крайней мере одна подгруппа из A, B и C содержит холлову $\{p, q\}$ -подгруппу G . Так как группа G разрешима, все холловы $\{p, q\}$ -подгруппы G сопряжены в G .

Заметим, что $(p, q) \in E(\Gamma(H)) \iff (p, q) \in E(\Gamma(H/O_{p'}(H)))$. Тогда в силу нашего предположения $O_{p'}(G) = 1$.

Предположим, что $p \neq q$. Тогда одна из подгрупп A, B и C содержит холлову $\{p, q\}$ -подгруппу H группы G . Пусть Q — силовская q -подгруппа H . По предположению $(p, q) \notin \Gamma(H)$. Значит, $H/O_q(H)$ — p -группа. Следовательно, $1 \neq Q \leq H$. Заметим, что $F(G) = O_p(G)$ в силу $O_{p'}(G) = 1$. Тогда

$$C_G(O_p(G)) = C_G(F(G)) \subseteq F(G) = O_p(G).$$

Заметим, что $O_p(G) \leq H$. Следовательно, $Q \subseteq C_G(O_p(G)) \subseteq O_p(G)$. Итак, $Q = 1$; противоречие.

Предположим, что $q = p$. Пусть $r \in \pi(G)$ и $r \neq p$. Из $F(G) = O_p(G)$ и $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ следует, что $O_r(H) = 1$ для всякой холловой $\{p, r\}$ -подгруппы H группы G .

По доказанному выше одна из подгрупп A, B и C содержит холлову $\{p, r\}$ -подгруппу H группы G . По предположению $(p, r) \notin \Gamma(H)$. Это значит, что $H/O_{p',p}(H)$ — r -группа. Из $O_r(H) = 1$ следует, что в H найдется нормальная силовская p -подгруппа P .

Значит, для любого $r \in \pi(G)$ найдется холлова $\{p, r\}$ -подгруппа H группы G такая, что $P \leq H$. Следовательно, $P \leq G$. Итак, $(p, p) \notin \Gamma(G)$; противоречие. $\square$

ПРИМЕР 7.2. Отметим, что условие попарной взаимной простоты индексов не может быть опущено в п. (2) теоремы 7.1. Рассмотрим симметрическую группу S_4 степени 4. Она является произведением любых двух из следующих подгрупп: силовской 2-подгруппы, знакопеременной группы A_4 степени 4 и подгруппы S_3 , изоморфной симметрической группе степени 3. Объединение их графов Хоукса равно $\{(2, 3), (3, 2)\}$. Но $\Gamma_H(S_4) = \{(2, 3), (3, 2), (2, 2)\}$.

Также заметим, что в этой теореме нельзя использовать силовский граф вместо графа Хоукса. Действительно, индексы S_4, S_4, A_4 в S_4 попарно взаимно просты. Однако

$$\Gamma_s(S_4) = \{(3, 2)\} \subset \{(3, 2), (2, 3)\} = \Gamma_s(S_4) \cup \Gamma_s(A_4) \cup \Gamma_s(S_4).$$

Следствие 7.3. Верны следующие утверждения.

(1) Пусть формация $\mathfrak{F}$ распознается Γ_H . Если группа G содержит три разрешимые $\mathfrak{F}$ -подгруппы A, B и C , индексы которых попарно взаимно просты, то $G \in \mathfrak{F}$.

(2) Пусть формация $\mathfrak{F}$ распознается Γ_{Nc} . Если $G = AB = AC = BC$, где $A, B, C \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) По теореме 7.1 $\Gamma_H(G) = \Gamma_H(A) \cup \Gamma_H(B) \cup \Gamma_H(C) = \Gamma_H(A \times B \times C)$. Так как $A \times B \times C \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ распознается Γ_H , то $G \in \mathfrak{F}$.

Утверждение (2) доказывается аналогично. $\square$

Из (2) следствия 7.3 вытекает известная теорема Кегеля [17, гл. I, § 4].

В [30] В. С. Монаховым были введены и исследованы классы групп $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{D}$. Класс $\mathfrak{K}$ состоит из групп, у которых любая подгруппа Шмидта сверхразрешима, а в $\mathfrak{D}$ собраны все группы с несверхразрешимыми подгруппами Шмидта. В частности, им было установлено, что $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{D}$ являются наследственными насыщенными формациями Фиттинга разрешимых групп, причем $\mathfrak{K}$ содержит все сверхразрешимые группы.

Следствие 7.4. Пусть $G = AB = BC = CA$, где A, B, C — подгруппы G . Тогда

(1) если в A, B и C любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой, то любая подгруппа Шмидта группы G также сверхразрешима;

(2) если A, B и C сверхразрешимы, то любая подгруппа Шмидта группы G сверхразрешима;

(3) если в A, B и C любая сверхразрешимая подгруппа нильпотентна, то и в G любая сверхразрешимая подгруппа нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 из [30] любая $\{p, q\}$ -группа Шмидта сверхразрешима тогда и только тогда, когда $p > q$ и q делит $p - 1$. Отсюда результаты (1)–(3) непосредственно вытекают из (1) теоремы 7.1. $\square$

Проблема 7.5. Можно ли убрать условие разрешимости подгрупп A, B, C в теореме 7.1?

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев А. В., Вдовин Е. П. Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
2. Заварницин А. В. О распознавании конечных групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.
3. Ballester-Bolinchas A., Cossey J., Esteban-Romero R. Graphs and classes of finite groups // Note Mat. 2013. V. 33, N 1. P. 89–94.
4. Ballester-Bolinchas A., Cossey J. Graphs, partitions and classes of groups // Monatsh. Math. 2012. V. 166, N 3–4. P. 309–318.
5. Kazarin L. S., Martinez-Pastor A., Perez-Ramos M. D. On the Sylow graph of a group and Sylow normalizers // Isr. J. Math. 2011. N 186. P. 251–271.
6. Russo F. G. Problems of connectivity between the Sylow graph, the prime graph and the non-commuting graph of a group // Adv. Pure Math. 2012. N 2. P. 391–396.
7. Cayley A. Desiderata and suggestions. 2. The theory of groups: graphical representation // Amer. J. Math. 1878. V. 1, N 2. P. 174–176.
8. Cooperman G., Finkelstein L., Sarawagi N. Applications of Cayley graphs // Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes // Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1991. P. 367–378. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 508).
9. Neumann B. A problem of Paul Erdős on groups // J. Austral. Math. Soc. 1976. N 21. P. 467–472.
10. Williams J. S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. N 69. P. 487–513.
11. Кондратьев А. С. О компонентах графа простых чисел для конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
12. Мазуров В. Д. Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.

13. Hawkes T. On the class of the Sylow tower groups // *Math. Z.* 1968. Bd 105. S. 393–398.
14. D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G. Lattice formations and Sylow normalizers: a conjecture // *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena.* 2007. N 55. P. 107–112.
15. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.
16. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
17. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
18. Distel R. Graph theory. Heidelberg; New York: Springer-Verl., 2005.
19. Griess R. L., Schmid P. The Frattini module // *Arch. Math.* 1978. V. 30. P. 256–266.
20. Gaschütz W. Über modulare Darstellungen endlicher Gruppen, die von freien Gruppen induziert werden // *Math. Z.* 1954. Bd 60. S. 274–286.
21. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Белорусская наука, 1997.
22. Ballester-Bolínches A., Perez-Ramos M. D. Two questions of L. A. Shemetkov on critical groups // *J. Algebra.* 1996. N 179. P. 905–917.
23. D'Aniello A., De Vivo C., Giordano G. Saturated formations closed under Sylow normalizers // *Commun. Algebra.* 2005. V. 33. P. 2801–2805.
24. Huppert B. Endlicher gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1967.
25. Suzuki M. On a class of doubly transitive groups // *Ann. Math.* 1962. V. 75. P. 105–145.
26. Kegel O. H. Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen // *Math. Z.* 1965. Bd 87, Heft 1. S. 42–48.
27. Казарин Л. С. Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // *Укр. мат. журн.* 1991. Т. 43, № 7–8. С. 947–950.
28. Васильев А. Ф. К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством // *Вопросы алгебры.* 1987. № 3. С. 3–11.
29. Pennington E. Trifactorisable groups // *Bull. Austral. Math. Soc.* 1973. V. 8. P. 461–469.
30. Монахов В. С. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // *Мат. заметки.* 1995. Т. 58, № 5. С. 717–722.

Поступила в редакцию 6 сентября 2017 г.

После доработки 29 августа 2018 г.

Принята к публикации 17 октября 2018 г.

Васильев Александр Федорович, Мурашко Вячеслав Игоревич
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Республика Беларусь
formation56@mail.ru, mvimath@yandex.ru