Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 3

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

В. Р. ПОРТНОВ

ОБ УСЛОВИЯХ НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ В СМЫСЛЕ ХАУСДОРФА ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 VI 1972)

1°. В настоящей заметке исследуется нелинейная задача, называемая задачей L, которая возникает в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Понятия ядра $\operatorname{Ker} L$, коядра $\operatorname{Coker} L$ и нормальной разрешимости задачи L в смысле Хаусдорфа мы вводим по аналогии с линейным случаем. Изучается вопрос о том, когда задача L нормально разрешима в смысле Хаусдорфа и когда, помимо нормальной разрешимости, разность между любыми двумя ее решениями принадлежит подпространству $\operatorname{Ker} L$. Приводятся достаточные условия нормальной разрешимости, более удобные для проверки, чем условия, сформулированные в работе автора [1], где исследовалась похожая задача. В частности, заранее не предполагается существование банахова пространства X, которое оператор задачи отображает на сопряженное пространство X^*. Оно строится как ядро оператора, аналогичного проекционным операторам С. Л. Соболева [2], причем для этого оператора оказывается справедливым неравенство, в одном специальном частном случае полученное С. М. Никольским и П. И. Лизоркиным [3]. На пространстве X к оператору задачи L применяется известная теорема Ф. Браудера [4] о разрешимости нелинейных уравнений с монотонными операторами.

2°. Постановка задачи L. Пусть $\mathfrak{R}$ и Z — вещественные банаховы пространства, $\mathfrak{C}_0$, V_0 и U — линейные подпространства в $\mathfrak{R}$ (не обязательно замкнутые), V — замыкание подпространства V_0 в $\mathfrak{R}$, а $\mathfrak{C}_0'$ — совокупность линейных, т. е. аддитивных и однородных, функционалов на $\mathfrak{C}_0$.

Будем предполагать, что имеет место включение $\mathfrak{C}_0 \subset V_0$.

Пусть, далее, Φ: $U \to Z^*$ — непрерывный оператор (вообще говоря, нелинейный), $\mathscr{L}$: $V \to Z$ — линейный непрерывный оператор, а $\mathscr{L}^*$: $Z^* \to \mathfrak{C}_0'$ — линейный оператор, определяемый при помощи тождества $\langle w, \mathscr{L}v\rangle = \langle \mathscr{L}^* w, v\rangle \quad \forall v \in \mathfrak{C}_0, \ \forall w \in Z^*$.

Рассмотрим уравнение

$$\mathscr{L}^*\Phi(u) = F, \tag{1}$$

в котором F — заданный функционал из пространства $\mathfrak{C}_0'$, а u — искомый элемент подпространства U.

Очевидно, элемент $u \in U$ является решением уравнения (1) в том и только в том случае, если выполняется тождество $\langle \Phi(u), \mathscr{L}v\rangle = \langle F, v\rangle$ $\forall v \in \mathfrak{C}_0$.

Пусть задано некоторое семейство операторов $\{B_\nu: U \to \Psi_\nu\}_{\nu \in N}$ (не обязательно линейных), где N — множество индексов, быть может, и пустое, а Ψ_ν — вещественное линейное пространство $\forall \nu \in N$.

Следуя С. Л. Соболеву [2], совокупность элементов $\{\Psi_\nu\}_{\nu \in N}$, $\psi_\nu \in \Psi_\nu$, назовем допустимой, если найдется такой элемент $u^{(0)} \in U$, что $B_\nu u^{(0)} = \psi_\nu \quad \forall \nu \in N$. Элемент $u^{(0)}$ в таком случае называется продолжением совокупности элементов $\{\psi_\nu\}_{\nu \in N}$. Если $N = \Phi$, то пустую совокупность элементов $\{\psi_\nu\}_{\nu \in N}$ мы для удобства будем считать допустимой, а любой элемент $u^{(0)} \in U$ — ее продолжением.

Введем еще на множестве $U \times V$ вещественный функционал $D_0(u, v)$, который непрерывен по каждому из аргументов u и v в отдельности, линеен по второму аргументу v и удовлетворяет равенству $D_0(u, v) = 0$ $\forall u \in U$, $\forall v \in \mathfrak{C}_0$.

Положим

$$D(u, v) = \langle \Phi(u), \mathscr{L} v \rangle + D_0(u, v) \quad \forall u \in U, \ \forall v \in V$$

и перейдем к формулировке основной задачи.

Задача L. Пусть заданы функционал $f \in V^*$ и некоторая допустимая совокупность элементов $\{\psi_\nu\}_{\nu \in \mathrm{N}}$. Требуется найти такой элемент $u \in U$, что 1) $D(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_0$ и 2) $B_\nu u = \psi_\nu \quad \forall \nu \in \mathrm{N}$.

Отметим, что при $\mathrm{N} = \Phi$ задача L состоит в отыскании по заданному функционалу $f \in V^*$ такого элемента $u \in U$, который удовлетворяет соотношению $D(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_0$.

Если через F обозначить сужение функционала f с V на $\mathfrak{C}_0$, то, очевидно, всякое решение задачи L есть решение уравнения (1), и, обратно, всякое решение уравнения (1), удовлетворяющее дополнительным условиям $D(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_0$ и $B_\nu u = \psi_\nu \quad \forall \nu \in \mathrm{N}$, является решением задачи L.

Следует отметить, что в виде уравнения (1) могут быть записаны многие дифференциальные уравнения и системы, имеющие так называемую дивергентную форму (см., например, ([4-6])); при этом задача L, определяемая семейством операторов $\{B_\nu\}_{\nu \in \mathrm{N}}$, линейным пространством V_0 и функционалом $D_0(u, v)$, порождает некоторую краевую задачу. В роли пространства $\mathfrak{R}$ выступает обычно некоторое функциональное пространство типа С. Л. Соболева, а решение уравнения (1) является обобщенным решением из этого пространства.

Положим

$$\operatorname{Ker} B_\nu = \{w \in U\colon\ B_\nu(u + \lambda w) = B_\nu(u) \quad \forall u \in V \text{ и всех вещественных чисел } \lambda\};$$

$$W = \begin{cases} U, & \text{если } \mathrm{N} = \phi, \\ \bigcap\limits_{\nu \in \mathrm{N}} \operatorname{Ker} B_\nu, & \text{если } \mathrm{N} \neq \phi; \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} L = \{w \in W\colon\ D(u + \lambda w, v) = D(u, v) \quad \forall u \in U, \ \forall v \in V \text{ и всех вещественных чисел } \lambda\},$$

$$\operatorname{Coker} L = \{v \in V\colon\ D(u, v) = 0 \quad \forall u \in U\},$$

$$(\operatorname{Coker} L)^\perp = \{f \in V^*\colon\ \langle f, v \rangle = 0 \ \ \forall v \in \operatorname{Coker} L\}.$$

Подпространства $\operatorname{Ker} L$ и $\operatorname{Coker} L$ будем называть соответственно ядром и коядром задачи L.

Определение. Задача L называется: 1) нормально разрешимой в смысле Хаусдорфа, если, какова бы ни была допустимая система элементов $\{\psi_\nu\}_{\nu \in \mathrm{N}}$, для ее разрешимости необходимо и достаточно чтобы $f \in (\operatorname{Coker} L)^\perp$; 2) вполне нормально разрешимой в смысле Хаусдорфа, если она нормально разрешима в смысле Хаусдорфа, и, кроме того, разность между любыми двумя ее решениями принадлежит подпространству $\operatorname{Ker} L$.

В случае, когда $\mathrm{N} = \Phi$, данное выше определение нормальной разрешимости может быть сформулировано еще и таким образом: задача L называется нормально разрешимой в смысле Хаусдорфа если для существования элемента $u \in U$, удовлетворяющего соотношению $D(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\langle f, v \rangle = 0$ $\forall v \in \operatorname{Coker} L$.

3°. Условия нормальной разрешимости задачи L. Введем подпространство $Q = V \cap W$ и предположим, что наряду с нормой $\|u\|_{\mathfrak{R}}$ на пространстве $\mathfrak{R}$ задана еще полунорма $p(u)$, ядро которой $\{u \in \mathfrak{R}$: $p(u) = 0\}$ мы обозначим через $\operatorname{Ker} p$.

Приведем условия, достаточные для нормальной разрешимости и для полной нормальной разрешимости задачи L.

Условие I. Подпространства Q и $Q+\operatorname{Ker} p$ замкнуты в $\mathfrak{R}$.

Условие II. Имеет место неравенство $p(u)\leqslant M\|u\|_{\mathfrak{R}}\quad \forall u\in Q$, где M — константа, не зависящая от $u\in Q$.

Условие III. Существует линейный оператор Π: $Q\to\operatorname{Ker} p$, удовлетворяющей неравенству $\|u-\Pi u\|_{\mathfrak{R}}\leqslant Ap(u)\quad \forall u\in Q$, где A — константа, не зависящая от $u\in Q$.

Условие IV. Ядро полунормы $p(u)$ допускает разложение в прямую сумму вида $\operatorname{Ker} p=(Q\cap\operatorname{Ker} p)\oplus\Lambda$, где Λ — некоторое замкнутое линейное подпространство в $\mathfrak{R}$.

Положим

$$X=\{u\in Q\colon\ \Pi u\in\Lambda\}.$$

Условие V. Замыкание подпространства X в $\mathfrak{R}$ является относительно нормы $\|u\|_{\mathfrak{R}}$ рефлексивным сепарабельным пространством Банаха.

Условие VI. $\lim\limits_{u\in X,\ p(u)\to\infty}\dfrac{D(w+u,u)}{p(u)}=\infty\quad \forall w\in U.$

Если $X\subset\operatorname{Ker} p$, то условие VI будем считать выполненным.

Определение. Пусть $\rho>0$. Положим $X_\rho=\{u\in X\colon \|u\|_{\mathfrak{R}}<\rho\}$, а через $\mathscr{B}_\rho(X)$ обозначим совокупность всех таких вещественных функционалов $\varkappa(u,v)$ на $X_\rho\times X_\rho$, которые обладают следующими свойствами: 1) для всякой последовательности $\{u_n\}\subset X_\rho$, сходящейся слабо в $\mathfrak{R}$ к элементу $u\in X_\rho$, $\varkappa(u_n,v)\to\varkappa(u,v)$ при $n\to\infty\quad\forall v\in X_\rho$, 2) для всякой последовательности $\{v_n\}\subset X_\rho$, сходящейся по норме пространства $\mathfrak{R}$ к элементу $v\in X_\rho$, $\varkappa(u,v_n)\to\varkappa(u,v)$ при $n\to\infty\quad\forall u\in X_\rho$, 3) для любых элементов $u\in X_\rho$ и $v\in X$ справедливо соотношение $\lambda^{-1}\varkappa(u,u-\lambda v)\to 0$ при $\lambda\to+0$.

Условие VII. Для любого элемента $w\in U$ и любого $\rho>0$ найдется такой функционал $\varkappa_{w,\rho}(u,v)\in\mathscr{B}_\rho(X)$, что имеет место неравенство

$$D(w+u,u-v)-D(w+v,u-v)\geqslant\varkappa_{w,\rho}(u,v)\quad \forall u,v\in X_\rho.$$

Условие VIII. $Q\cap\operatorname{Ker} p\subset\operatorname{Coker} L$ и $Q+\operatorname{Coker} L=V$.

Теорема 1. *Если выполнены условия* I — VIII, *то задача L нормально разрешима в смысле Хаусдорфа.*

Условие IX. $Q\cap\operatorname{Ker} p\subset\operatorname{Ker} L$ и $Q+\operatorname{Ker} L=W$.

Условие X. $\{u,\ v\in U$ и $B_\nu u=B_\nu v\quad \forall\nu\in N\}\Rightarrow\{u-v\in W\}$.

Если $N=\Phi$, то условие X мы будем считать выполненным.

Отметим, что условие X выполняется, если каждый оператор B_ν является линейным на U или если для любого $\nu\in N$

$$\{u,v\in U\quad\text{и}\quad B_\nu u=B_\nu v\}\Rightarrow\{u-v\in\operatorname{Ker} B_\nu\}.$$

Условие XI. $\{u,v\in U,\ u-v\in X$ и

$$D(u,u-v)=D(v,u-v)\}\Rightarrow\{u-v\in\operatorname{Ker} L\}.$$

Теорема 2. *Если выполнены условия* I — XI, *то задача L вполне нормально разрешима в смысле Хаусдорфа.*

В заключение отметим, что вопросы, связанные с нормальной разрешимостью нелинейных уравнений в банаховых пространствах, впервые изучались С. И. Похожаевым [7].

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
29 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Р. Портнов, ДАН, 196, № 5 (1971). [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1962. [3] С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, ДАН, 159, № 3 (1964). [4] Ю. А. Дубинский, УМН, 23, в. 1 (1968). [5] М. М. Смирнов, Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, «Наука», 1966. [6] М. И. Вишик, Тр. Московск. матем. общ., 12 (1963). [7] С. И. Похожаев, ДАН, 184, № 1 (1969).