Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 3

УДК 517.535.6 *МАТЕМАТИКА*

И. П. ПРОСКУРНЯ

О РОСТЕ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО НИЖНЕГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 12 VI 1972)

1. Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция. Р. Неванлинна ([1], [2]) ввел понятие дефекта $f(z)$ в точке a:

$$\delta(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)},$$

где $T(r, f)$ — неванлинновская характеристика $f(z)$, а $m(r, a, f)$ — среднее приближение $f(z)$ к a на окружности $|z|=r$ (см. ([2]), стр. 169). Очевидно, величину $\delta(a, f)$ можно рассматривать как величину отклонения $f(z)$ от числа a.

Теорема Р. Неванлинны о величинах дефектов и о множестве дефектных значений

$$E_N(f) = \{a\colon\ \delta(a, f) > 0\}$$

утверждает (см. ([2]), стр. 271, 275) следующее:

Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция. Тогда

а) *множество $E_N(f)$ не более чем счетно*;

б) *величины дефектов мероморфной функции $f(z)$ удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{(a)} \delta(a, f) \leqslant 2.$$

В. П. Петренко ([3–5]) исследовал отклонение $f(z)$ от a в метрике $C_{[0, 2\pi]}$ и ввел такие величины:

$$M(r, a, f) = \max_{|z|=r} \frac{1}{|f(z)-a|}, \quad a \neq \infty, \qquad M(r, \infty, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

$$\beta(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln^+ M(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

Величина $\beta(a, f)$ называется величиной отклонения мероморфной функции $f(z)$ от числа a (см. ([4], [5])), а множество

$$\Omega(f) = \{a\colon\ \beta(a, f) > 0\}$$

называется множеством положительных отклонений мероморфной функции $f(z)$ (см. ([6])).

Исследования В. П. Петренко величин отклонений $\beta(a, f)$ и множеств положительных отклонений $\Omega(f)$ показывают, что между свойствами величин $\beta(a, f)$ и величин дефектов Р. Неванлинны $\delta(a, f)$, а также между свойствами множеств $\Omega(f)$ и множеств дефектных значений в смысле Р. Неванлинны $E_N(f)$ имеется существенное различие. Именно, справедливо следующее утверждение (см. ([4], [6])).

Теорема А. *Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция; тогда:*

1) *Если $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то*

а) *множество $\Omega(f)$ не более чем счетно;*

б) *при любом γ, $1/2 < \gamma \leqslant 1$, сходится ряд*

$$\sum_{(a)} \beta^{\gamma}(a, f); \tag{1}$$

в) *при $\gamma < 1/2$ ряд (1) может расходиться.*

2) *Если нижний порядок у $f(z)$ бесконечный, то множество $\Omega(f)$ может иметь мощность континуума *.*

Таким образом, мы наблюдаем отличие в свойствах величин отклонений для мероморфных функций конечного нижнего порядка и мероморфных функций бесконечного нижнего порядка. Для изучения этого различия в работах ([8, 9]), используя метрику $L^p_{[0,2\pi]}$, $1 < p < \infty$, автором были введены следующие характеристики приближения мероморфной функции к числу a. Положим при любом p, $1 \leqslant p < \infty$, для мероморфной при $z \neq \infty$ функции и любого комплексного числа a

$$m_p(r, a, f) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|}\right)^p d\theta\right\}^{1/p}, \quad \text{если } a \neq \infty,$$

$$m_p(r, \infty, f) = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\ln^+|f(re^{i\theta})|)^p\, d\theta\right\}^{1/p},$$

$$\delta_p(a, f) = \varliminf_{r\to\infty}\frac{m_p(r, a, f)}{T(r, f)}, \quad D_p(f) = \{a : \delta_p(a, f) > 0\}.$$

Заметим, что $\delta_1(a, f) = \delta(a, f)$, $\beta(a, f) = \lim\limits_{p\to\infty}\delta_p(a, f)$, $\delta_p(a, f)$ не убывают с ростом p. Очевидно, при любом $p \geqslant 1$ $D_p(f) \subseteq \Omega(f)$.

Приведем теперь полученный нами результат о свойствах величин $\delta_p(a, f)$ и множества $D_p(f)$ (см. ([8, 9])).

Теорема Б. *Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция и $1 < p < \infty$; тогда:*

1) *Если $f(z)$ имеет конечный нижний порядок λ, то*

а) *множество $D_p(f)$ не более чем счетно;*

б) *при любом γ, $1 / (2 + 1 / p) < \gamma \leqslant 1$, сходится ряд*

$$\sum_{(a)} \delta_p^{\gamma}(a, f); \tag{2}$$

в) *при $\gamma < 1 / (2 + 1 / p)$ ряд (2) может расходиться.*

2) *Если нижний порядок у $f(z)$ бесконечный, то множество $D_p(f)$ может иметь мощность континуума.*

Таким образом, мы снова наблюдаем различие в свойствах величин $\delta_p(a, f)$ и множествах $D_p(f)$ для мероморфных функций конечного нижнего порядка и мероморфных функций бесконечного нижнего порядка. С целью дальнейшего выяснения этого различия в этой работе мы вводим более тонкую характеристику роста мероморфных функций.

2. Основные результаты. Пусть $\varphi(x)$ — действительная, неотрицательная, монотонно возрастающая выпуклая функция на положитель-

* Известно, что множество $\Omega(f)$ имеет внутреннюю логарифмическую емкость нуль (см. ([7])).

ной полуоси, $\varphi(0)=0$. Положим для мероморфной при $z\neq\infty$ функции $f(z)$ и любого комплексного числа a

$$m_\varphi(r, a, f)=\varphi^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(\ln^+\frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|}\right)d\theta\right\},\quad a\neq\infty,$$

$$m_\varphi(r, \infty, f)=\varphi^{-1}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi\left(\ln^+|f(re^{i\theta})|\right)d\theta\right\},$$

$$\delta_\varphi(a, f)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m_\varphi(r, a, f)}{T(r, f)},\qquad D_\varphi(f)=\{a:\delta_\varphi(a, f)>0\}.$$

Для дефектов Р. Неванлинны $\delta(a, f)$ и величин $\delta_\varphi(a, f)$ имеем (см. ([10]), стр. 77):

$$\delta(a, f)\leqslant\delta_\varphi(a, f)\qquad(\delta(a, f)\equiv\delta_\varphi(a, f)\quad\text{при}\quad\varphi(x)\equiv x).$$

В дальнейшем будем считать, что $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция $(\varphi''(x)\geqslant 0)$ и

$$\varphi(x)=x\cdot\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — медленно растущая функция (см. ([11]), стр. 72) и

$$\alpha(0)=1,\quad \alpha'(x)\geqslant 0.$$

Обозначим далее $(e_2=e^e)$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant r}(x+e_2)\cdot\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\cdot\ln\ln(x+e_2)=B(r, \varphi).$$

Определение. Будем говорить, что функция $\varphi(x)$ принадлежит классу Λ_A $(\varphi(x)\in\Lambda_A)$, если

$$\lim_{r\to\infty}B(r, \varphi)=A.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z\neq\infty$ функция и функция $\varphi(x)\in\Lambda_A$ $(A<\infty)$. Тогда*

а) *множество $D_\varphi(f)$ не более чем счетно;*

б) *величины $\delta_\varphi(a, f)$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{(a)}\delta_\varphi(a, f)\leqslant 2e^A. \tag{3}$$

Оценка (3) является точной в следующем смысле: для функции $E(z)$ определенной соотношением (2.51) в ([11]), стр. 256, и функции

$$\varphi_0(x)=x\cdot\alpha(x)=x\cdot\exp\left\{A\int_e^{\ln(x+e_2)}\frac{ds}{\ln s}\right\}$$

получаем $(\varphi_0(x)\in\Lambda_A$, так как $B(r, \varphi_0)=A)$

$$\delta_{\varphi_0}(\infty, E)\geqslant e^A.$$

Точность утверждения а) характеризует

Теорема 2. *Пусть $B(r)$ — любая непрерывная медленно растущая функция $(B'(r)\geqslant 0)$ такая, что*

$$\lim_{r\to\infty}B(r)=\infty,\quad B(r)=o(\ln\ln r),\quad r\to\infty.$$

Существует функция $\varphi(x) = x \cdot \alpha(x)$, для которой $B(r, \varphi) = B(r)$; множество $C = C(\varphi)$ мощности континуума и целая функция $G(z)$ бесконечного нижнего порядка, для которой множество $D_\varphi(G) \subset C$.

3. Теоремы 1 и 2 доказываются с помощью модификации известных конструкций (см. ([3], [11–14])) и следующего утверждения *.

Теорема 3. *Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция и $\gamma > 1$ любое. Тогда*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln^+ M(r, f)}{T(r, f)\cdot\{\ln^+ T(r, f)\}^\nu} = 0. \tag{4}$$

Заметим, что некоторые из приведенных здесь результатов распространяются и на целые кривые (см. ([16], [17])). В частности, для целых кривых получен аналог соотношения (4):

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{L(r, \mathbf{a}, \mathbf{G})}{T(r, \mathbf{G})\cdot\{\ln T(r, \mathbf{G})\}^\nu} = 0, \quad \nu > 1,$$

где

$$L(r, \mathbf{a}, \mathbf{G}) = \max_{|z|=r} \frac{\|\mathbf{G}(re^{i\theta})\| \cdot \|\mathbf{a}\|}{|\mathbf{G}(re^{i\theta})\cdot\mathbf{a}|}.$$

Выражаю глубокую признательность В. П. Петренко за внимание к работе.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
7 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Nevanlinna, Le théorème de Picard — Borel et la theorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929. [2] Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М.— Л., 1941. [3] В. П. Петренко, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, № 6 (1969). [4] В. П. Петренко, ДАН, **184**, № 5 (1969). [5] В. П. Петренко, ДАН, **187**, № 1 (1969). [6] В. П. Петренко, ДАН, **189**, № 4 (1969). [7] В. П. Петренко, Изв. АН СССР, сер. матем., **34**, № 1 (1970). [8] И. П. Проскурня, Сборн. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, в. 16, 1972. [9] И. П. Проскурня, там же, в. 17, 1973. [10] Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. 1, М., 1956. [11] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение значений мероморфных функций, «Наука», 1970. [12] У. К. Хейман, Мероморфные функции, М., 1966. [13] А. А. Гольдберг, ДАН, **98**, № 6 (1954). [14] А. А. Гольдберг, Укр. матем. журн., **11**, № 4 (1959). [15] T. Shimizu, Japan, J. Math., **6** (1929). [16] Г. Виттих, Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям, 1960. [17] В. П. Петренко, ДАН, **207**, № 3 (1972).

* Если $f(z) = g(z)$ является целой функцией бесконечного нижнего порядка, то наша оценка (4) дает известный результат Симидзу (см. ([12]), стр. 43; ([15])).