Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2018. Том 59, № 1

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ТРЕМЯ ЗАДАННЫМИ ПОДГРУППАМИ

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, К. Л. Парфенков

Аннотация. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп. Исследуются конечные группы, имеющие три $\mathfrak{F}$-подгруппы с попарно взаимно простыми индексами. Получены новые признаки принадлежности таких групп формациям Шеметкова, формациям всех сверхразрешимых групп, всех групп с нильпотентным коммутантом и т. п.

DOI 10.17377/smzh.2018.59.106

Ключевые слова: конечная группа, сверхразрешимая группа, w-сверхразрешимая группа, формация, наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа.

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Пусть группа G имеет три подгруппы A, B и C, индексы которых попарно взаимно просты в G. Хорошо известно, что если A, B и C абелевы, то и сама G абелева. Как установили Виландт [1] и Кегель [2], группа G сохраняет свойство разрешимости (нильпотентности) в случае разрешимости (соответственно нильпотентности) подгрупп A, B и C. С другой стороны, сверхразрешимость A, B и C уже не влечет в общем случае сверхразрешимости самой группы G. В [3–6] найден ряд достаточных условий сверхразрешимости группы G со сверхразрешимыми подгруппами A, B и C. Однако вопрос о строении группы G с тремя сверхразрешимыми подгруппами попарно взаимно простых индексов в G оставался открытым. Возникает следующая естественная

Проблема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс групп (формация, класс Фиттинга, класс Шунка) и группа G имеет три $\mathfrak{F}$-подгруппы (сверхразрешимые подгруппы), индексы которых попарно взаимно просты в G. Найти (конструктивно описать) подходящий класс групп $\mathfrak{H}$, которому принадлежит группа G.*

Настоящая работа посвящена решению указанной выше проблемы в случае, когда $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, состоящая из разрешимых групп. Для этого нам потребуется следующая конструкция.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-*субнормальной* в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \le H_{i-1}$ для $i = 1, \dots, n$.

В [7] введен следующий класс групп: $\mathrm{w}\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ и всякая силовская подгруппа из G $\mathfrak{F}$-субнормальна в $G)$.

В [7, 8] установлены свойства $\mathrm{w}\mathfrak{F}$. В частности, если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, то $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ также является наследственной насыщенной формацией. В [9] исследован важный случай $\mathrm{w}\mathfrak{F}$, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп.

Подгруппа H группы G называется *$\mathbb{P}$-субнормальной в G*, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$.

Группа G называется *w-сверхразрешимой*, если в ней любая силовская подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна.

В любой группе всякая $\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, а для разрешимых групп имеет место и обратное утверждение. Однако в общем случае оно неверно.

Класс групп $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ состоит из всех w-сверхразрешимых групп. В [9] установлены его свойства. Отметим, что $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ — наследственная насыщенная формация, состоящая из разрешимых групп.

Теорема A. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп. Пусть группа G имеет три $\mathfrak{F}$-подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *G разрешима.*

(2) *$G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$.*

(3) *Если G метанильпотентна, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Теорема B. *Пусть группа G имеет три сверхразрешимые подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $G_i \neq G$ для любого $i = 1, 2, 3$, то $|\pi(G)| \geq 3$.*

(2) *G w-сверхразрешима.*

(3) *Нильпотентная длина G не превосходит 3.*

(4) *Если p — наименьший простой делитель порядка G, то коммутант G' p-разложим.*

Теорема C. *Пусть группа G имеет три сверхразрешимые подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G. Пусть выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *коммутант G' группы G содержится в $G_1 \cap G_2 \cap G_3$;*

(2) *G_i $\mathfrak{U}$-субнормальна в G для любого $i = 1, 2, 3$;*

(3) *G_i $\mathbb{P}$-субнормальна в G для любого $i = 1, 2, 3$.*

Тогда G сверхразрешима.

Напомним [10], что подгруппа M группы G называется *модулярной* в G, если она является модулярным элементом в решетке всех подгрупп группы.

Согласно [11] подгруппа H группы G называется *субмодулярной* в G, если существует цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_{s-1} \leq H_s = G$ такая, что H_{i-1} — модулярная подгруппа в H_i для $i = 1, \ldots, s$.

Группа называется *сильно сверхразрешимой* [12], если она сверхразрешима и любая силовская подгруппа субмодулярна в ней.

В [12] исследованы класс $s\mathfrak{U}$ всех сильно сверхразрешимых групп и класс $sm\mathfrak{U}$ всех групп с субмодулярными силовскими подгруппами. В частности, установлено, что эти классы являются наследственными насыщенными формациями, при этом $s\mathfrak{U} \subset sm\mathfrak{U} \subset \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $s\mathfrak{U} \neq \mathfrak{U} \neq sm\mathfrak{U}$.

Теорема D. *Пусть группа G имеет три сильно сверхразрешимые подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *В G любая силовская подгруппа субмодулярна.*

(2) *Если G_i субмодулярна в G для любого $i = 1, 2, 3$, то G сильно сверхразрешима.*

2. Предварительные сведения

В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в [13, 14].

Пусть G — группа, p — простое число. Через $|G|$ обозначается порядок G, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей $|G|$, $O_p(G)$ — наибольшая нормальная p-подгруппа из G, $\mathrm{Syl}_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп из G, $F(G)$ — подгруппа Фиттинга из G, т. е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа из G, $F_p(G)$ — p-нильпотентный радикал G, т. е. наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа из G, $\mathrm{Core}_G(M)$ — ядро подгруппы M в G, т. е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в G, 1 — единичная группа (подгруппа) и π — некоторое подмножество множества всех простых чисел.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$ всегда следует $G/N \in \mathfrak{F}$. *Формация* — это гомоморф $\mathfrak{F}$, для которого из $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2)$ всегда вытекает, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$; *наследственной*, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда получаем, что $H \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы H из G. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-*корадикал* группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп из $\mathfrak{F}$. *Минимальная не $\mathfrak{F}$-группа* — это группа G, у которой $\mathfrak{F}$ принадлежат все собственные подгруппы из G и только они. *Группа Шмидта* — минимальная ненильпотентная группа.

Функция $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется *локальным экраном*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если найдется локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ состоит из групп G, у которых $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K и каждого $p \in \pi(H/K)$. Всякая локальная формация является насыщенной формацией, и наоборот.

Группа G называется *дисперсивной по Оре*, если для $\pi_{p_i} = \{p_1, p_2, \dots, p_i\} \subseteq \pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_n$, G имеет нормальную холлову π_{p_i}-подгруппу, $i = 1, 2, \dots, n$; *p-разложимой*, если она имеет нормальную силовскую p-подгруппу и нормальную холлову p'-подгруппу; *π-разложимой*, если она p-разложима для любого $p \in \pi$.

Согласно [15] *A-группа* — это разрешимая группа, у которой любая силовская подгруппа абелева. Класс всех A-групп образует наследственную формацию.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп, $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп, $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп, $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп, $\mathfrak{A}(p-1)$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $(p-1)$, и $\mathscr{A}$ — класс всех A-групп.

Теорема 2.1 [14, гл. 1, теорема 3.4]. *Если группа G имеет три разрешимые подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G, то она разрешима.*

Лемма 2.2 [14, гл. А, лемма 1.6(b)]. *Если группа G имеет две подгруппы A и B, причем $(|G:A|, |G:B|) = 1$, то $G = AB$.*

Лемма 2.3 [13, лемма 3.9]. *Если H/K — главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G) \leq C_G(H/K)$.*

Теорема 2.4 [15, гл. VI, теорема 4.4]. *Если группа $G = AB$ с абелевыми подгруппами A и B, то $G'' = 1$.*

В дальнейшем в работе $\mathfrak{F}$ обозначает непустую формацию.

Предложение 2.5 [16, предложение 2.2.8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, N — нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N$.

(2) *Если U — подгруппа из $G = UN$, то $U^{\mathfrak{F}}N = G^{\mathfrak{F}}N$.*

Лемма 2.6 [13, лемма 4.5]. *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Свойства $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп запишем, используя леммы 6.1.6, 6.1.7 из [16].

Лемма 2.7. *Пусть H и K — подгруппы группы G и $N \trianglelefteq G$. Если $\mathfrak{F}$ — формация, то справедливы следующие утверждения*:

(a) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то HN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N;*

(b) *если $N \leq H$ и H/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;*

(c) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в K и K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.*

Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то справедливы следующие утверждения:

(d) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в K;*

(e) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;*

(f) *если $G^{\mathfrak{F}} \leq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G;*

(g) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то H^x $\mathfrak{F}$-субнормальна в G для любого $x \in G$.*

Лемма 2.8. (1) *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная формация, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{F}$ и $\mathrm{w}(\mathrm{w}\mathfrak{F}) = \mathrm{w}\mathfrak{F}$* [7, лемма 1.4].

(2) *Если наследственная формация $\mathfrak{F}$ состоит из разрешимых групп, то и $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ состоит из разрешимых групп* [7, лемма 1.6].

Теорема 2.9 [7, теорема B]. *Если $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, то $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация.*

Предложение 2.10 [9, предложение 2.8]. *Если группа G w-сверхразрешима, то G дисперсивна по Оре.*

Обобщенным коммутантом [9] группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что G/N является группой с абелевыми силовскими подгруппами.

Теорема 2.11 [9, теорема 2.13]. *Пусть G — w-сверхразрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Любая метанильпотентная подгруппа группы G сверхразрешима.*

(2) *Любая бипримарная подгруппа группы G сверхразрешима.*

(3) *Обобщенный коммутант группы G нильпотентен.*

Модулярная подгруппа M группы G как модулярный элемент в решетке всех подгрупп группы определяется следующими условиями [10]: 1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \leq G$, $Z \leq G$ таких, что $X \leq Z$; 2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \leq G$, $Z \leq G$ таких, что $M \leq Z$.

Лемма 2.12 [10, лемма 5.1.2]. *Подгруппа M группы G является максимальной модулярной подгруппой в G тогда и только тогда, когда либо M нормальна в G, либо $G/\operatorname{Core}_G(M)$ неабелева порядка pq для простых чисел p и q.*

Лемма 2.13 [11, лемма 1]. *Пусть G — группа и $T \leq G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если T субмодулярна в G и U — подгруппа из G, то $U \cap T$ — субмодулярная в U подгруппа.*

(2) *Если T субмодулярна в G, $N \trianglelefteq G$ и $N \leq T$, то T/N субмодулярна в G/N.*

(3) *Если T/N субмодулярна в G/N, то T субмодулярна в G.*

(4) *Если T субмодулярна в G, то T^x субмодулярна в G для любого $x \in G$.*

(5) *Если T_1 и T_2 — субмодулярные в G подгруппы, то $T_1 \cap T_2$ — субмодулярная в G подгруппа.*

(6) *Если T субмодулярна в G, то TN субмодулярна в G для любой нормальной в G подгруппы N.*

3. Доказательства основных результатов

Лемма 3.1. *Пусть группа G имеет три подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G, и H — подгруппа из G. Если $G_i < H$ для некоторого $i \in \{1,2,3\}$, то подгруппы G_i, $H \cap G_j$ и $H \cap G_k$ имеют попарно взаимно простые индексы в H, где $\{j,k\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{i\}$ и $j \neq k$.*

Доказательство. Пусть для определенности $G_1 < H$. По лемме 2.2 $G = G_1G_2 = G_1G_3 = G_2G_3$. По тождеству Дедекинда $H = G_1(H \cap G_2) = G_1(H \cap G_3)$. Тогда $|G : G_2| = |G_1 : G_1 \cap G_2| = |H : H \cap G_2|$ и $|G : G_3| = |G_1 : G_1 \cap G_3| = |H : H \cap G_3|$. Отсюда и из $\pi(|H : G_1|) \subseteq \pi(|G : G_1|)$ следует, что подгруппы G_1, $H \cap G_2$ и $H \cap G_3$ имеют попарно взаимно простые индексы в H. Аналогично рассуждая при $G_2 < H$ или $G_3 < H$, приходим к выводу, что G_i, $H \cap G_j$ и $H \cap G_k$ имеют попарно взаимно простые индексы в H, где $\{j,k\} \subseteq \{1,2,3\} \setminus \{i\}$ и $j \neq k$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — гомоморф. Если группа G имеет три $\mathfrak{X}$-подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G, и N — нормальная подгруппа из G, то G_1N/N, G_2N/N и G_3N/N принадлежат $\mathfrak{X}$ и имеют в G/N попарно взаимно простые индексы.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что $G_iN/N \simeq G_i/G_i \cap N \in \mathfrak{X}$ и $\pi(|G/N : G_iN/N|) \subseteq \pi(|G : G_i|)$ для любого $i \in \{1,2,3\}$. $\square$

Следующий результат имеет также самостоятельный интерес.

Предложение 3.1. *Пусть группа G w-сверхразрешима и p — наименьший простой делитель ее порядка. Тогда коммутант G' p-разложим.*

Доказательство. Пусть R — холлова p'-подгруппа группы G. По предложению 2.10 R нормальна в G, поэтому $RF(G)$ p-разложима. Согласно п. (3) теоремы 2.11 обобщенный коммутант группы G содержится в $F(G)$. Тогда $G/RF(G)$ абелева. Стало быть, коммутант группы G содержится в $RF(G)$ и p-разложим. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G и $N = C_G(N)$. Если N — силовская p-подгруппа из G, $N \leq K \leq G$ и коммутант K' нильпотентен, то $K' \leq N$.*

Доказательство. Рассмотрим в K' любую силовскую r-подгруппу R, $r \in \pi(K')$. Из нильпотентности K' следует, что R нормальна в K. Если $r \neq p$, то $R \leq C_K(N) \leq C_G(N) = N$. Это невозможно, так как $R \neq 1$. Итак, $r = p$ и $R = K'$. По теореме Силова $K' \leq N$. $\square$

Доказательство теоремы А. (1) Утверждение следует из теоремы 2.1.

(2) Пусть G — контрпример наименьшего порядка. Тогда G имеет $\mathfrak{F}$-подгруппы G_1, G_2 и G_3 такие, что их индексы в G попарно взаимно просты, и $G \notin \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Из $G_i \in \mathfrak{F}$ для любого $i \in \{1,2,3\}$ и $G = G_1G_2 = G_1G_3 = G_2G_3$ следует, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Рассмотрим G/N. Если $G_iN \neq G$ для любого $i \in \{1,2,3\}$, то по лемме 3.2 для G/N все условия теоремы выполняются. Поэтому в силу выбора G получаем, что $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Если $G_iN = G$ для некоторого $i \in \{1,2,3\}$, то $G/N \simeq G_i/G_i \cap N \in \mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{F}$.

Пусть G имеет еще одну минимальную нормальную подгруппу N_1, которая отлична от N. Тогда $G/N_1 \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Так как $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ является формацией, имеем $G/(N \cap N_1) \simeq G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Значит, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Допустим, что $N \subseteq \Phi(G)$. Тогда $G/\Phi(G) \simeq G/N/\Phi(G)/N \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Из насыщенности $\mathrm{w}\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G.

Поэтому можно считать, что $\Phi(G) = 1$. В этом случае в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$ и $N = G^{\mathrm{w}\mathfrak{F}} = C_G(N) = F(G)$.

Пусть P — силовская p-подгруппа группы G.

Предположим, что $N \subseteq P$. Из $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ следует, что P/N является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G/N. По п. (b) леммы 2.7 P — $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G.

Допустим, что $P \neq PN$. Из выбора G вытекает, что $PN \neq G$ и $|\pi(G)| > 2$. Ввиду теоремы Силова и попарной взаимной простоты индексов подгрупп G_1, G_2, G_3 в G найдется $x \in G$ такой, что $P^xN \subseteq G_i$ для некоторого $i \in \{1,2,3\}$. Из $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ и $P^xN/N \in \mathrm{Syl}_p(G)$ следует, что P^xN/N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G/N. По п. (b) леммы 2.7 P^xN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Так как $P^xN \subseteq G_i \in \mathfrak{F}$, по п. (f) леммы 2.7 P^x $\mathfrak{F}$-субнормальна в P^xN. По пп. (c) и (g) леммы 2.7 получаем, что P $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Следовательно, $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, что противоречит выбору G. Утверждение (2) доказано.

(3) Пусть G — контрпример наименьшего порядка. Тогда G метанильпотентна, в ней есть три $\mathfrak{F}$-подгруппы G_1, G_2 и G_3, у которых индексы попарно взаимно просты в G, и $G \notin \mathfrak{F}$.

Рассмотрим минимальную нормальную подгруппу N группы G. Из разрешимости G следует, что N — абелева p-группа для некоторого простого p. Если $G_iN/N = G/N$ для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$, то $G/N \in \mathfrak{F}$. Пусть $G_iN/N \neq G/N$ для любого $i = 1, 2, 3$. Из леммы 3.2, метанильпотентности G/N и выбора G заключаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Значит, $N = G^{\mathfrak{F}}$.

Так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, N является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G и $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = MN$, $N \cap M = 1$, $N = C_G(N)$ для некоторой максимальной подгруппы M из G. Заметим, что $N \subseteq F(G)$ и $F(G)$ является p-группой. Из леммы 2.3 заключаем, что $N = F(G)$. Поскольку $1 \neq G^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$, имеем $G^{\mathfrak{N}} \leq N$. Ввиду минимальности нормальной подгруппы N получаем, что $N = G^{\mathfrak{N}}$. Значит, $G/N \simeq M$ — нильпотентная группа. Из $O_p(M) = 1$ заключаем, что N — силовская p-подгруппа группы G.

Пусть Q — произвольная силовская q-подгруппа группы M. Тогда $Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$ и $Q^gN \subseteq G_i$ для некоторых $i \in \{1, 2, 3\}$ и $g \in G$. Из наследственности $\mathfrak{F}$ и $G_i \in \mathfrak{F}$ получаем, что $Q^gN \in \mathfrak{F}$. Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Заметим, что $F_p(Q^gN) = N$. По лемме 2.6 $Q^gN/F_p(Q^gN) \in f(p)$. Это означает, что $Q \simeq Q^gN/N \in f(p)$, т. е. все силовские подгруппы группы M принадлежат $f(p)$. Ввиду того, что $f(p)$ — формация и M нильпотентна, получаем $M \in f(p)$. Из $G/N \simeq M$ и $N = C_G(N)$ следует, что N является f-центральным главным фактором группы G. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G. Утверждение (3) доказано.

Доказательство теоремы B. (1) Утверждение следует из того, что в G индексы G_1, G_2 и G_3 попарно взаимно просты.

(2) Утверждение вытекает из утверждения (2) теоремы A при $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$.

(3) Пусть G — контрпример наименьшего порядка и N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как G разрешима, N — абелева p-группа для некоторого простого p. Если $G_iN = G$ для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$, то G/N сверхразрешима. Тогда G/N метанильпотентна. Ввиду абелевости N имеем $G \in \mathfrak{N}^3$. Предположим, что $G_iN \neq G$ для любого $i = 1, 2, 3$. Тогда для G/N все условия выполняются. Ввиду выбора G фактор-группа G/N принадлежит $\mathfrak{N}^3$.

Класс групп $\mathfrak{N}^3$ является насыщенной формацией. Поэтому N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, причем $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = MN$, где M — некоторая максимальная подгруппа из G, $N \cap M = 1$ и $N = F(G) = C_G(N)$. Группа G w-сверхразрешима. Поэтому G дисперсивна по Оре. Из $O_p(M) = 1$ и единственности N следует, что $N \in \mathrm{Syl}_p(G)$, p — наибольший простой делитель порядка G.

Ввиду попарной взаимной простоты индексов $|G : G_i|$, $i = 1, 2, 3$, подгруппа N содержится по крайней мере в двух подгруппах G_i и G_j, $i \neq j$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $N \leq G_2 \cap G_3$. Пусть $i \in \{2, 3\}$. Заметим, что $G_i = (G_i \cap M)N$ и $F_p(G_i) = N$. Из сверхразрешимости G_i и леммы 2.6 заключаем, что $G_i \cap M \simeq G_i/F_p(G_i) \in \mathfrak{A}(p-1)$. Так как $|G : G_i| = |M : G_i \cap M|$, подгруппы $G_2 \cap M$ и $G_3 \cap M$ имеют взаимно простые индексы в M. Тогда $M = (G_2 \cap M)(G_3 \cap M)$ — произведение абелевых подгрупп $G_2 \cap M$ и $G_3 \cap M$. По теореме 2.4 $M'' = 1$. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{N}^3$. Это противоречит выбору G. Утверждение (3) доказано.

(4) Утверждение следует из предложения 3.1. $\square$

Доказательство теоремы C. Обозначим через θ_i, $i = 1, 2$, следующие свойства подгрупп G_1, G_2 и G_3 группы G:

θ_1 означает, что коммутант G' содержится в $G_1 \cap G_2 \cap G_3$,

θ_2 означает, что G_i $\mathfrak{U}$-субнормальна в G для любого $i = 1, 2, 3$.

Пусть $\mathfrak{X}^\theta$ — класс всех групп G, которые имеют три сверхразрешимые подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G, и G_1, G_2 и G_3 обладают свойством θ, где $\theta \in \{\theta_1, \theta_2\}$.

Предположим, что $\mathfrak{X}^\theta \setminus \mathfrak{U} \neq \varnothing$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X}^\theta \setminus \mathfrak{U}$.

Так как $\mathfrak{X}^\theta$ состоит из разрешимых групп, в G найдется минимальная нормальная подгруппа N, которая является p-группой для некоторого простого p.

Группа G имеет три $\mathfrak{U}$-подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых в G попарно взаимно просты, и эти подгруппы обладают свойством θ. Ввиду леммы 3.2 G_1N/N, G_2N/N и G_3N/N принадлежат $\mathfrak{U}$ и имеют в G/N попарно взаимно простые индексы. Если $\theta = \theta_1$, то $(G/N)' = G'N/N \leq G_iN/N$ для любого $i = 1, 2, 3$. Если $\theta = \theta_2$, то G_iN/N $\mathfrak{U}$-субнормальна в G/N для любого $i = 1, 2, 3$ по п. (a) леммы 2.7. Это означает, что $G/N \in \mathfrak{X}^\theta$. Поэтому $G/N \in \mathfrak{U}$ по выбору G.

Так как $\mathfrak{U}$ — насыщенная формация, N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = NM$, где M — некоторая максимальная подгруппа из G, $N \cap M = 1$ и $N = C_G(N) = F(G) = G^{\mathfrak{U}}$.

По утверждению (2) теоремы B и предложению 2.10 группа G дисперсивна по Оре. Поэтому N содержится в нормальной силовской p-группе P из G и p — наибольший простой делитель $|G|$. Ввиду леммы 2.3 $O_p(M) = 1$. Отсюда заключаем, что $N = P$.

Из попарной взаимной простоты индексов G_1, G_2 и G_3 в G следует, что N содержится по крайней мере в двух подгруппах G_i и G_j, $i \neq j$. Пусть для определенности $N \subseteq G_2 \cap G_3$.

1. Предположим, что $\theta = \theta_1$. Ввиду выбора G ее коммутант G' отличен от 1. Из единственности минимальной нормальной подгруппы N и свойства θ_1 следует, что $N \leq G' \leq G_1 \cap G_2 \cap G_3$. По лемме 3.3 $G_i' \leq N$ для любого $i = 1, 2, 3$. Тогда G_1/N, G_2/N, G_3/N абелевы с попарно взаимно простыми индексами в G/N. Значит, G/N абелева. Поэтому G метанильпотентна и по утверждению (3) теоремы A сверхразрешима. Это противоречит выбору G. Утверждение (1) доказано.

2. Пусть $\theta = \theta_2$. Так как G_1 $\mathfrak{U}$-субнормальна в G и $G_1 \neq G$, найдется максимальная подгруппа M_1 из G такая, что $G_1G^{\mathfrak{U}} = G_1N \leq M_1$. Если $G_1 = M_1$, то $M_1 \in \mathfrak{U}$. Предположим, что $G_1 \neq M_1$. По лемме 3.1 и п. (d) леммы 2.7 сверхразрешимые подгруппы G_1, $M_1 \cap G_2$ и $M_1 \cap G_3$ имеют попарно взаимно простые индексы в M_1 и $\mathfrak{U}$-субнормальны в M_1. Это означает, что $M_1 \in \mathfrak{X}^{\theta_2}$. Из $|M_1| < |G|$ и выбора G заключаем, что $M_1 \in \mathfrak{U}$. Заметим, что $|G : M_1|$ взаимно прост с $|G : G_i|$, $i \in \{2, 3\}$. Из сверхразрешимости M_1, G_2, G_3 следует, что коммутанты этих подгрупп нильпотентны. По лемме 3.3 $M_1' \leq N$, $G_2' \leq N$, $G_3' \leq N$. Значит, G/N абелева, так как имеет три абелевы подгруппы M_1/N, G_2/N, G_3/N с попарно взаимно простыми индексами в G/N. Следовательно, G метанильпотентна, и по теореме A $G \in \mathfrak{U}$. Получили противоречие. Утверждение (2) доказано.

Утверждение (3) следует из (2), так как в разрешимой группе любая $\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, и наоборот. $\square$

Доказательство теоремы D. (1) Пусть G — контрпример наименьшего порядка. Группа G имеет три $s\mathfrak{U}$-подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G, но $G \notin sm\mathfrak{U}$.

Пусть M_i — максимальная подгруппа группы G, содержащая G_i, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Если $G_i = M_i$, то $M_i \in s\mathfrak{U} \subseteq sm\mathfrak{U}$. Если $G_i \neq M_i$, то ввиду леммы 3.1 и наследственности $s\mathfrak{U}$ заключаем, что M_i имеет три $s\mathfrak{U}$-подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в M_i. По выбору G подгруппа M_i принадлежит $sm\mathfrak{U}$.

По теореме A группа G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если $G_iN \neq G$ для любого $i = 1, 2, 3$, то $\pi(|G/N : G_iN/N|) \subseteq \pi(|G : G_i|)$. Поэтому G_1N/N, G_2N/N и G_3N/N имеют в G/N попарно взаимно простые индексы. Так как $G_iN/N \simeq G_i/G_i \cap N \in s\mathfrak{U}$ для любого $i = 1, 2, 3$, по выбору G фактор-группа G/N принадлежит $sm\mathfrak{U}$. Если $G_iN = G$ для некоторого $i = 1, 2, 3$, то $G/N \simeq G_i/G_i \cap N \in s\mathfrak{U} \subseteq sm\mathfrak{U}$. Поскольку $sm\mathfrak{U}$ — насыщенная формация, заключаем, что N является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G и $\Phi(G) = 1$. Следовательно, $G = MN$ для некоторой максимальной подгруппы M из G, $N \cap M = 1$, $N = C_G(N)$. Ввиду разрешимости G подгруппа N абелева и $|N| = p^n$ для некоторого простого p. Из единственности N и $O_p(M) = 1$ следует, что $N = F(G)$.

Рассмотрим любую силовскую q-подгруппу R группы G. Так как $G/N \in sm\mathfrak{U}$, силовская q-подгруппа RN/N группы G/N является субмодулярной в G/N. По п. (3) леммы 2.13 RN — субмодулярная подгруппа в G. Если $N \leq R$, то R субмодулярна в G. Предположим, что $N \not\leq R$. Тогда $p \neq q$. Из $(|G : M_1|, |G : M_2|) = (|G : M_1|, |G : M_3|) = (|G : M_2|, |G : M_3|) = 1$ следует, что R^xN содержится в M_i для некоторых $i \in \{1, 2, 3\}$ и $x \in G$. Из наследственности $sm\mathfrak{U}$ и $M_i \in sm\mathfrak{U}$ заключаем, что $R^xN \in sm\mathfrak{U}$. Тогда R^x является субмодулярной подгруппой в R^xN, которая субмодулярна в G. Значит, R^x субмодулярна в G. По п. (4) леммы 2.13 R субмодулярна в G. Поэтому $G \in sm\mathfrak{U}$. Это противоречит выбору G. Утверждение (1) доказано.

(2) Пусть G — контрпример наименьшего порядка. Тогда в G есть три $s\mathfrak{U}$-подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G, G_i субмодулярна в G для любого $i = 1, 2, 3$, но $G \notin s\mathfrak{U}$. По утверждению (1) теоремы в G любая силовская подгруппа субмодулярна.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G. Из выбора G и того, что $s\mathfrak{U}$ — насыщенная формация, заключаем, что $G/N \in s\mathfrak{U}$, N является единственной минимальной нормальной подгруппой из G и $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = MN$, M — некоторая максимальная подгруппа из G, $M \cap N = 1$, $N = C_G(N) = G^{s\mathfrak{U}}$. Заметим, что $F(G) = N$ является силовской p-подгруппой, где p — наибольший простой делитель $|G|$.

Если $G_iN = G$ для некоторого $i = 1, 2, 3$, то G_i — максимальная подгруппа в G и G_i не является нормальной подгруппой в G. По лемме 2.12 $G/\operatorname{Core}_G(G_i)$ — неабелева группа порядка pq, $p \neq q$. Так как $N = C_G(N)$, имеем $\operatorname{Core}_G(G_i) = 1$. Поэтому $|G| = pq$. Это означает, что $G \in s\mathfrak{U}$; противоречие с выбором G.

Пусть $G_iN \neq G$ для любого $i = 1, 2, 3$. Из попарной взаимной простоты в G индексов G_1, G_2 и G_3 следует, что $N \subseteq G_i \cap G_j$ для некоторых $i \neq j$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $N \subseteq G_2 \cap G_3$. Из субмодулярности G_1N/N в G/N вытекает, что G_1N/N содержится в некоторой максимальной модулярной подгруппе W/N группы G/N. Тогда W субмодулярна в G. Если $W = G_1$, то $W \in s\mathfrak{U}$. Допустим, что $W \neq G_1$. По лемме 3.1 G_1, $W \cap G_2$ и $W \cap G_3$ имеют в W попарно взаимно простые индексы. Они принадлежат $s\mathfrak{U}$ ввиду наследственности $s\mathfrak{U}$. Поэтому $W \in s\mathfrak{U}$ по выбору G. Так как $s\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}$, подгруппы W, G_2 и G_3 имеют нильпотентные коммутанты. Из леммы 3.3 заключаем, что W/N, G_2/N и G_3/N абелевы. Тогда G/N абелева, поскольку является произведением трех абелевых подгрупп, индексы которых попарно взаимно просты в G/N. По утверждению (3) теоремы А G сверхразрешима. Итак, $G \in s\mathfrak{U}$, что противоречит выбору G. $\square$

4. Заключительные замечания

Доказанные выше теоремы позволяют для конкретных формаций получить как известные, так и новые результаты.

Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп. По лемме 2.8 имеют место включения $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Используя результаты из [8], описывающие свойства конструкции $\mathrm{w}\mathfrak{F}$, заключение теоремы А можно уточнить, рассмотрев следующие случаи.

Случай 1. $\mathfrak{F} = \mathrm{w}\mathfrak{F}$.

Предложение 4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп и для любой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G фактор-группа $G/F(G)$ является либо единичной, либо p-группой для некоторого простого p. Если группа G имеет три $\mathfrak{F}$-подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Утверждение получается из теоремы 4.1 в [8] и утверждения (2) теоремы А. $\square$

Свойством $\mathfrak{F} = \mathrm{w}\mathfrak{F}$ обладают наследственные насыщенные формации Шеметкова и наследственные насыщенные решеточные формации.

Напомним, что *формацией Шеметкова* называется формация $\mathfrak{F}$, у которой любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта. Формация $\mathfrak{F}$ называется *решеточной*, если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой группе.

Следствие 4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ состоит из разрешимых групп и является либо наследственной насыщенной формацией Шеметкова, либо наследственной насыщенной решеточной формацией. Если группа G имеет три $\mathfrak{F}$-подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 4.2 [2]. *Если группа G имеет три нильпотентные подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G, то G нильпотентна.*

Следствие 4.3. *Если группа G имеет три разрешимые π-нильпотентные подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G, то G π-нильпотентна.*

Следствие 4.4. *Если группа G имеет три разрешимые π-разложимые подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G, то G π-разложима.*

Новый интересный пример формации Шеметкова предложен В. С. Монаховым в [17], а именно класс всех групп, у которых любая подгруппа Шмидта сверхразрешима. Им было установлено, что этот класс содержит все сверхразрешимые группы, состоит из дисперсивных по Оре групп и является наследственной насыщенной формацией Фиттинга.

Следствие 4.5. *Пусть группа G имеет три подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G. Если в G_i любая подгруппа Шмидта сверхразрешима для $i = 1, 2, 3$, то и в G любая подгруппа Шмидта сверхразрешима.*

Следствие 4.6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп. Если группа G имеет три $\mathrm{w}\mathfrak{F}$-подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G, то $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$.*

Доказательство. По лемме 2.8 и теореме 2.9 $\mathrm{w}(\mathrm{w}\mathfrak{F}) = \mathrm{w}\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп. Утверждение получается из утверждения (2) теоремы A. $\square$

Следствие 4.7. *Если группа G имеет три* w*-сверхразрешимые подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G, то G* w*-сверхразрешима.*

Случай 2. $\mathfrak{F} \subset \mathrm{w}\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}$.

В качестве примеров формаций с этим свойством можно взять наследственные формации $\mathfrak{F}$ такие, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Ввиду [7, следствие D1] $\mathrm{w}(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\mathscr{A}$.

Следствие 4.8. *Пусть группа G имеет три подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G. Если в G_i коммутант ${G_i}'$ нильпотентен для $i = 1, 2, 3$, то в G обобщенный коммутант нильпотентен.*

Из утверждения (3) теоремы A получаются следующие результаты.

Следствие 4.9 [4]. *Если группа G имеет три сверхразрешимые подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G, и коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.10. *Если метанильпотентная группа G имеет три сверхразрешимые подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G, то G сверхразрешима.*

Случай 3. $\mathrm{w}\mathfrak{F} = \mathfrak{S}$.

Например, как показано в [7, следствие D.2], $\mathrm{w}\mathfrak{N}^2 = \mathfrak{S}$. Однако в этом случае теорема A не дает новой информации о строении группы.

Приведем некоторые результаты, вытекающие из теоремы C.

Заметим, что если группа G сверхразрешима и $|\pi(G)| \geq 3$, то для различных простых p_1, p_2, p_3 из $\pi(G)$ в G найдутся максимальные подгруппы G_i, содержащие холловы ${p_i}'$-подгруппы, при этом G_i сверхразрешима и $|G : G_i| = p_i$, $i = 1, 2, 3$. Отсюда и из п. (3) теоремы C получается

Следствие 4.11 [18]. *Группа G сверхразрешима с порядком, имеющим самое малое три различных простых делителя, тогда и только тогда, когда существуют три максимальные сверхразрешимые подгруппы из G, индексы которых являются тремя различными простыми числами.*

Согласно [19, 20] группа $G = AB$ называется *произведением взаимно перестановочных* (*взаимно sn-перестановочных*) *подгрупп* A и B, если A перестановочна с любой (соответственно субнормальной) подгруппой из B, а B перестановочна с любой (соответственно субнормальной) подгруппой из A.

Согласно [21] для подгрупп A и B группы G подгруппа A называется *наследственно G-перестановочной* с B, если $AB^g = B^gA$ для некоторого $g \in \langle A, B\rangle$.

В [22, лемма 4.5] установлено, что если в группе $G = AB$ подгруппа A разрешима, а подгруппа B либо перестановочна с любой субнормальной подгруппой из A, либо наследственно G-перестановочна с любой подгруппой из A, то B $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Ввиду этого п. (3) теоремы C включает следующие результаты.

Следствие 4.12 [6, теорема 3.9]. *Если в группе G существуют три сверхразрешимые подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G, и G_1G_i — произведение взаимно перестановочных подгрупп G_1 и G_i для любого $i \in \{2, 3\}$, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.13. *Если в группе G существуют три сверхразрешимые подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G, и G_1G_i — произведение взаимно sn-перестановочных подгрупп G_1 и G_i для любого $i \in \{2, 3\}$, то G сверхразрешима.*

Следствие 4.14. *Если в группе G существуют три сверхразрешимые подгруппы G_1, G_2 и G_3, индексы которых попарно взаимно просты в G, и G_i наследственно G-перестановочна с любой подгруппой из G_j для любых i, j, то G сверхразрешима.*

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wielandt H.* Über die Normalstruktur von mehrfach faktorisierbaren Gruppen // J. Austral. Math. Soc. 1960. V. 1, N 2. P. 143–146.

2. *Kegel O. H.* Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. 1965. Bd 87, Heft 1. S. 42–48.

3. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И.* Рекурсивно распознаваемые локальные формации конечных групп // Проблемы физики, математики и техники. 2009. № 1. С. 44–50.

4. *Flowers N., Wakefield T. P.* On a group with three supersolvable subgroups of pairwise relatively prime indices // Arch. Math. 2010. V. 95, N 4. P. 309–315.

5. *Guo W., Skiba A. N.* On factorizations of finite groups with $\mathfrak{F}$-hypercentral intersections of the factors // J. Group Theory. 2011. V. 14. P. 695–708.

6. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Triple factorizations and supersolubility of finite groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2016. V. 59, N 2. P. 301–309.

7. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И.* О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами // Проблемы физики, математики и техники. 2011. № 4. С. 86–91.

8. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Вегера А. С.* Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 259–275.

9. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.

10. *Schmidt R.* Subgroup lattices of groups. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.

11. *Zimmermann I.* Submodular subgroups in finite groups // Math. Z. 1989. Bd 202. S. 545–557.

12. *Васильев В. А.* Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1277–1288.

13. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

14. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

15. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.

16. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.

17. *Монахов В. С.* О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Мат. заметки. 1995. Т. 58, № 5. С. 717–722.

18. *Wang K.* Finite group with two supersoluble subgroups of coprime indices // Northeast. Math. J. 2001. V. 17, N 2. P. 221–225.

19. *Asaad M., Shaalan A.* On the supersolubility of finite groups // Arch. Math. 1989. V. 53, N 4. P. 318–326.

20. *Alejandre M., Ballester-Bolinches A., Cossey J., Pedraza-Aguilera M.* On some permutable products of supersoluble groups // Rev. Mat. Iberoam. 2004. V. 20. P. 413–425.

21. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. 2006. V. 68, N 3–4. P. 433–449.

22. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 59–67.

Статья поступила 25 апреля 2017 г.

Васильев Александр Федорович, Парфенков Кирилл Леонидович
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
кафедра алгебры и геометрии,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
formation56@mail.ru

Васильева Татьяна Ивановна
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
кафедра алгебры и геометрии,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь;
Белорусский гос. университет транспорта,
кафедра высшей математики,
ул. Кирова, 34, Гомель 246653, Беларусь
tivasilyeva@mail.ru