УДК 512.542

О конечных группах с заданной факторизацией[1]

А. Ф. Васильев Республика Беларусь, г. Гомель, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
Т. И. Васильева Республика Беларусь, г. Гомель, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Белорусский государственный университете транспорта
Д. Н. Симоненко Республика Беларусь, г. Гомель, Белорусский государственный университете транспорта
formation56@mail.ru, tivasilyeva@mail.ru, dsimonenkon@mail.ru

On finite groups with a given factorization

A. F. Vasil'ev Republic of Belarus, Gomel, Francisk Scorina Gomel State University
T. I. Vasil'eva Republic of Belarus, Gomel, Francisk Scorina Gomel State University, Belarusian State University of Transport
D. N. Simonenko Republic of Belarus, Gomel, Belarusian State University of Transport
formation56@mail.ru, tivasilyeva@mail.ru, dsimonenkon@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. В 1938 году Фиттинг доказал нильпотентность группы, являющейся произведением своих нормальных нильпотентных подгрупп. Этот результат послужил основой исследований классов групп $\mathfrak{F}$, замкнутых относительно произведений заданных $\mathfrak{F}$-подгрупп. В 1953 году Хупперт [1] привел пример несверхразрешимого произведения двух нормальных сверхразрешимых подгрупп. В 1957 году Бэр [2] показал, что группа, представимая в произведение своих нормальных сверхразрешимых подгрупп, сверхразрешима тогда и только тогда, когда ее коммутант нильпотентен. В 1971 году Фрисен [3] установил сверхразрешимость группы $G = AB$, где A и B — нормальные сверхразрешимые подгруппы, имеющие взаимно простые индексы в G.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация. Хорошо известна следующая задача: найти условия, при которых $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, где $A \in \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{F}$.

Напомним [4], что группа $G = AB$ называется *произведением взаимно перестановочных подгрупп* A и B, если A перестановочна с каждой подгруппой из B и B перестановочна с каждой подгруппой из A. Изучению таких факторизаций групп посвящены многочисленные работы различных авторов. Основные результаты, полученные в этом направлении до 2010 года, изложены в монографии [4].

В настоящем сообщении мы продолжаем исследования, начатые в работе [5]. Через $\mathcal{K}_G$ [4] обозначается множество всех (с точностью до изоморфизма) композиционных факторов группы G и через $\mathcal{K}_G^a$ множество всех (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов группы G. Если группа $G = AB$ есть произведение своих взаимно перестановочных подгрупп A и B, то $\mathcal{K}_G = \mathcal{K}_A \cup \mathcal{K}_B$ [4].

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{F}$ называется слабо MP-замкнутым в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = AB$, являющуюся произведением своих взаимно перестановочных $\mathfrak{F}$-подгрупп A и B, причем $\mathcal{K}_G^a \backslash \mathcal{K}_A^a \cap \mathcal{K}_G^a \backslash \mathcal{K}_B^a = \emptyset$. Пустой класс считается слабо MP-замкнутым в любом классе групп $\mathfrak{X}$.*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке научной темы «Применение локального метода Гашюца в теории критических групп» номер гос. регистрации - 20160789, входящей в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016-2020 годы «Конвергенция 2020», подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем».

Отметим, что в классе всех разрешимых групп из условия $(|G : A|, |G : B|) = 1$ следует $\mathcal{K}_G^a \backslash \mathcal{K}_A^a \cap \mathcal{K}_G^a \backslash \mathcal{K}_B^a = \emptyset$.

Задача 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация (класс Фиттинга, класс Шунка) и $\mathfrak{X}$ — класс групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Для данного класса $\mathfrak{X}$ описать все формации (классы Фиттинга, классы Шунка) $\mathfrak{F}$, слабо MP-замкнутые в $\mathfrak{X}$.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ — насыщенные формации, содержащие все сверхразрешимые π-группы для $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть H и F — максимальные внутренние локальные экраны $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Формация $\mathfrak{F}$ является слабо MP-замкнутой в $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда формация слабо $F(p)$ MP-замкнута в $H(p)$ для любого простого p.*

Данная теорема позволяет получать как известные, так и новые результаты для различных конкретных формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$.

Отметим, что формации всех сверхразрешимых групп и всех групп с нильпотентным коммутантом не являются слабо MP-замкнутыми.

Приведем некоторые примеры слабо MP-замкнутых формаций.

Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной* в G [6], если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что индекс $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, \ldots, n$. Группа, у которой любая силовская подгруппа является $\mathbb{P}$-субнормальной, называется *расширенно сверхразрешимой*. Класс всех расширенно сверхразрешимых групп образует наследственную насыщенную формацию разрешимых групп [6].

Следствие 1. *[7] Пусть группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных расширенно сверхразрешимых подгрупп A и B, причем $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Тогда G расширенно сверхразрешима.*

Обозначим через $\mathcal{A}$ класс всех разрешимых групп, каждая силовская подгруппа которых является абелевой. Тогда класс $\mathfrak{N}\mathcal{A}$ всех групп, являющихся расширением нильпотентных групп с помощью $\mathcal{A}$-групп, образует наследственную насыщенную формацию.

Следствие 2. *Пусть группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных $\mathfrak{N}\mathcal{A}$-подгрупп A и B, причем $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Тогда G принадлежит $\mathfrak{N}\mathcal{A}$.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Huppert B. Monomiale Darstellung endlicher Gruppen // Nagoya Math. J. 1953. V. 6. S. 93-94.

2. Baer R. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1 № 2. P. 115-187.

3. Friesen D. K. Products of Normal Supersolvable Subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30 № 1. P. 46-48.

4. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of Finite Groups. — Berlin/New York: Walter de Gruyter, 2010. 334 p.

5. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Симоненко Д. Н. О MP-замкнутых насыщенных формациях конечных групп // Известия вузов. Математика. 2017. № 6. С. 9-17.

6. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Том 51 № 6. С. 1270-1281.

7. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2012. Том 53 № 1. С. 59-67.

———————————————————————————

УДК 512.542

О проективных свойствах подгрупп конечных групп[1]

Т. И. Васильева Республика Беларусь, г. Гомель, Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Белорусский государственный университете транспорта
tivasilyeva@mail.ru

On projective properties of subgroups of finite groups

T. I. Vasil'eva Republic of Belarus, Gomel, Francisk Scorina Gomel State University, Belarusian State University of Transport
tivasilyeva@mail.ru

Все рассматриваемые группы конечные. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Согласно фундаментальной теореме Холла-Чунихина всякая π-разрешимая группа обладает свойствами D_π и $D_{\pi'}$. Для группы G свойство D_π означает выполнимость условий: 1) G имеет по крайней мере одну π-холлову подгруппу, 2) любые две π-холловы подгруппы сопряжены в G, 3) каждая π-подгруппа группы G содержится в некоторой ее π-холловой подгруппе.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-покрывающей, если она принадлежит $\mathfrak{F}$ и из условий $H \leq U \leq G$, $V \trianglelefteq U$, $U/V \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $HV = U$.

В π-разрешимой группе π-холловы и π'-холловы подгруппы являются примерами $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп в случае, когда $\mathfrak{F}$ совпадает с классом всех π-групп, соответственно, всех π'-групп. Во всякой π-разрешимой группе существует в точности один класс сопряженных $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп, если $\mathfrak{F}$ — класс Шунка, состоящий из π-замкнутых групп и содержащий все π'-группы [1]. В общем случае $\mathfrak{F}$-подгруппа π-разрешимой группы может не содержаться в $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе.

Л. А. Шеметковым в [2] была предложена задача нахождения условий, при которых $\mathfrak{F}$-подгруппа группы содержится в ее $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе ($\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп).

Рассмотрению отдельных случаев решения этой задачи посвящено данное сообщение.

Определение 1. *[3] Подгруппа H группы G арифметически вкладывается в подгруппу F из G, если из условий $\langle H, F\rangle \leq U \leq G$ и $V \trianglelefteq U$ всегда следует $\pi(HV/V) \subseteq \pi(FV/V)$.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех π-разложимых групп. Если абнормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа H π-разрешимой группы G арифметически вкладывается в каждую $\mathfrak{F}$-покрывающую подгруппу из G, то H содержится в некоторой $\mathfrak{F}$-покрывающей подгруппе группы G.*

Напомним [4], что K_π-подгруппой группы G называется самонормализуемая π-разложимая подгруппа, чей порядок делится на наибольший π'-делитель группы G. Легко показать, что если π-разрешимая группа имеет нормальную π-холлову подгруппу, то множество всех π-разложимых покрывающих подгрупп совпадает с множеством всех K_π-подгрупп группы. В этом случае нормальность π-холловой подгруппы существенна (см. пример из [5]).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке научной темы «Конечные группы нильпотентного и сверхразрешимого типов, их нечеткие аналоги и приложения» номер гос. регистрации - 20160353, входящей в государственную программу научных исследований Республики Беларусь на 2016-2020 годы «Конвергенция 2020» подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем».