S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 13, стр. 897–910 (2016) УДК 512.542
DOI 10.17377/semi.2016.13.072 MSC 20D30, 20D40, 20F17

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЗАДАННЫМ НОРМАЛЬНЫМ СТРОЕНИЕМ

А.Ф. ВАСИЛЬЕВ, Т.И. ВАСИЛЬЕВА, Е.Н. МЫСЛОВЕЦ

Abstract. We investigate classes of finite groups which are local analogues of quasinilpotent group, as well as c-supersoluble, ca-solvable and ca-supersoluble groups introduced by V.A. Vedernikov. We obtained the properties of these classes and their application in the study of factorizations of finite groups by their normal and mutually permutable subgroups.

Keywords: finite group, J-quasinilpotent group, Jc-supersoluble group, Jca-soluble group, Jca-supersoluble group, product of normal subgroups, composition formation.

Посвящается профессору В.С. Монахову в связи с его 70-летием

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Изучение групп в зависимости от свойств их нормальных, в частности, главных рядов является классической задачей. Еще в самом начале развития теории групп использование этого подхода позволило выделить такие центральные понятия, как разрешимая группа, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа и др. В дальнейшем, начиная с 30-х годов прошлого столетия, благодаря работам Ф. Холла, С.А. Чунихина на основе разработанного ими арифметического метода изучения групп

Vasil'ev, A.F., Vasil'eva, T.I., Myslovets, E.N. On finite groups with a given normal structure.

Поступила 13 июля 2016 г., опубликована 24 октября 2016 г.

были введены локальные аналоги отмеченных выше понятий: определения π-разрешимой, π-нильпотентной, π-сверхразрешимой групп и т. д., которые получили значительное развитие и нашли многочисленные приложения в различных вопросах теории групп [1]. Существенную роль в решении задач современной теории групп играет понятие квазинильпотентной группы (см. [2, с. 123–131]).

Выход в свет знаменитой работы В. Гашюца [3] положил начало возникновению и развитию теории формаций с ее общими методами и систематизирующими точками зрения. Возникшая теория дала значительный импульс изучению групп по свойствам их нормальных рядов. Это связано, прежде всего, с методом построения формаций с помощью групповых функций и экранов. В наиболее общем виде этот метод был разработан Л.А. Шеметковым в работах [4, 5] и систематически изложен в [6]. Наиболее важные типы экранов — это локальные и композиционные, использование их позволило не только систематизировать многие ранее известные результаты о группах с заданными свойствами их нормальных рядов, но и получить новые результаты [6]–[9].

Среди работ такого рода выделим статью [10] В.А. Ведерникова, в которой им на основе теории формаций были выделены и изучены некоторые свойства новых классов групп: c-сверхразрешимых групп, ca-сверхразрешимых групп и др. В дальнейшем в работе [11], используя метод композиционных экранов, были установлены новые свойства c-сверхразрешимых групп. В частности, было доказано, что класс всех c-сверхразрешимых групп является композиционной (разрешимо насыщенной) формацией. Напомним, что группа называется c-сверхразрешимой, если она обладает нормальным рядом с простыми факторами. Структурные свойства c-сверхразрешимых групп были найдены Д. Робинсоном в работе [12]. В последние годы c-сверхразрешимые группы нашли различные приложения, в частности, при изучении произведений взаимно и тотально перестановочных групп (см., например, работы [13]–[15]).

В настоящей работе вводятся локальные аналоги ("J-аналоги") понятий квазинильпотентности, а также c-сверхразрешимости, ca-сверхразрешимости и др. из работы [10], исследуются свойства замыкания соответствующих им классов и их приложения при изучении произведений нормальных и взаимно перестановочных подгрупп.

Пусть J обозначает некоторый (возможно пустой) класс простых групп. Будем говорить, что группа G является *J-группой*, если множество всех ее композиционных факторов содержится в J. Главный фактор группы G будем называть *J-фактором*, если он является J-группой.

Определение 1. *Группа G называется:*

1) *J-квазинильпотентной, если для любого J-главного фактора группы G, каждый автоморфизм, индуцированный элементом из G, является внутренним;*

2) *Jc-сверхразрешимой, если любой главный J-фактор группы G является простой группой;*

3) *Jca-разрешимой, если G обладает главным рядом, у которого каждый J-фактор, являющийся абелевым, централен в G;*

4) *Jca-сверхразрешимой, если она Jc-сверхразрешима и ее каждый главный J-фактор, являющийся абелевым, централен в G.*

По определению для любого класса J простых групп единичная группа считается J-квазинильпотентной, Jc-сверхразрешимой, Jca-разрешимой, Jca-сверхразрешимой.

Закрепим следующие обозначения:

$\mathfrak{N}^*_J$ — класс всех J-квазинильпотентных групп;

$\mathfrak{U}_{Jc}$ — класс всех Jc-сверхразрешимых групп;

$\mathfrak{S}_{Jca}$ — класс всех Jca-разрешимых групп;

$\mathfrak{U}_{Jca}$ — класс всех Jca-сверхразрешимых групп.

В случае, когда $J = \mathfrak{J}$ — класс всех простых групп, в определении 1 пункт 1) совпадает с определением квазинильпотентной группы, пункты 2)–4) совпадают с определениями c-сверхразрешимой, ca-разрешимой и ca-сверхразрешимой групп, соответственно, из [10]. Если J — класс всех простых неабелевых групп, то $\mathfrak{N}^*_J$ совпадает с классом всех sn-разрешимых групп из [10].

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *классы $\mathfrak{N}^*_J$, $\mathfrak{S}_{Jca}$ и $\mathfrak{U}_{Jca}$ являются разрешимо насыщенными формациями Фиттинга;*

2) *класс $\mathfrak{U}_{Jc}$ является нормально наследственной разрешимо насыщенной формацией;*

3) *$\mathfrak{U}_{Jc}$ является формацией Фиттинга, если J не содержит абелевых групп;*

4) *$\mathfrak{N}^*_J \subseteq \mathfrak{U}_{Jca} \subseteq \mathfrak{U}_{Jc}$ и $\mathfrak{U}_{Jca} \subseteq \mathfrak{S}_{Jca}$. В общем случае $\mathfrak{N}^*_J \neq \mathfrak{U}_{Jca} \neq \mathfrak{U}_{Jc}$ и $\mathfrak{U}_{Jca} \neq \mathfrak{S}_{Jca}$.*

Следствие 1. *Если N — нормальная разрешимая подгруппа группы G и $G/\Phi(N)$ Jc-сверхразрешима, то G Jc-сверхразрешима.*

Отметим, что по известной теореме Р. Бэра [8, гл. IV, теорема 4.17] формация является разрешимо насыщенной тогда и только тогда, когда она является композиционной. В предложении 1 настоящей работы для классов групп $\mathfrak{N}^*_J$, $\mathfrak{S}_{Jca}, \mathfrak{U}_{Jca}, \mathfrak{U}_{Jc}$ установлено, что они являются композиционными формациями и найдены их максимальные внутренние композиционные экраны

Пусть $G = HK$, где H и K — нормальные сверхразрешимые подгруппы группы G. Пример из [16, гл. I, с. 8–9] показывает, что G не всегда является сверхразрешимой. Известно, что G сверхразрешима в одном из следующих случаев: 1) коммутант G' нильпотентен [17]; 2) H и K имеют взаимно простые индексы в G [16, гл. 4, теорема 3.4]; 3) либо H, либо K нильпотентна. Отмеченные выше результаты были распространены в [11] на c-сверхразрешимые группы, в работе В.С. Монахова и И.К. Чирик [18] на p-сверхразрешимые группы. Следующая теорема является "J-аналогом"теоремы 2 из [11].

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если группа $G = HK$, где H и K — нормальные Jc-сверхразрешимые подгруппы из G и фактор-группы G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов, то G Jc-сверхразрешима;*

2) *если группа G есть расширение Jca-разрешимой группы с помощью A-группы и $G = HK$, где H и K — нормальные Jc-сверхразрешимые подгруппы из G, то G Jc-сверхразрешима;*

3) *если группа $G = HK$, где H — нормальная Jc-сверхразрешимая подгруппа и K — нормальная Jca-сверхразрешимая подгруппа из G, то G Jc-сверхразрешима.*

Следствие 2. *Если группа $G = HK$, где H и K — нормальные Jc-сверхразрешимые подгруппы из G и $(|G : H|, |G : K|) = 1$, то G Jc-сверхразрешима.*

Группу G назовем *полусверхразрешимой*, если G Jc-сверхразрешима и J совпадает с классом всех групп, порядки которых являются простыми числами.

Следствие 3. *Если группа $G = HK$, где H и K — нормальные полусверхразрешимые подгруппы из G и фактор-группы G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов, то G полусверхразрешима.*

Следствие 4. *Если группа G есть расширение ca-разрешимой группы с помощью A-группы и $G = HK$, где H и K — нормальные полусверхразрешимые подгруппы из G, то G полусверхразрешима.*

Следствие 5. *Если группа $G = HK$, где H — нормальная полусверхразрешимая подгруппа и K — нормальная ca-разрешимая подгруппа из G, то G полусверхразрешима.*

Следствие 6. *Если группа G есть расширение J-квазинильпотентной группы с помощью A-группы и $G = HK$, где H и K — нормальные Jc-сверхразрешимые подгруппы из G, то G Jc-сверхразрешима.*

Следствие 7. *Если группа представима в виде произведения нормальной J-квазинильпотентной подгруппы и нормальной Jc-сверхразрешимой подгруппы, то она Jc-сверхразрешима.*

В последние годы активно изучаются произведения групп, у которых факторы связаны определенными условиями перестановочности для подгрупп.

Согласно [19, с. 151] группа $G = AB$ называется *произведением взаимно перестановочных подгрупп* A и B, если A перестановочна с каждой подгруппой из B и B перестановочна с каждой подгруппой из A.

В работе [15] был получен аналог теоремы Р. Бэра [17] для произведений взаимно перестановочных c-сверхразрешимых подгрупп. Развитием этого результата является

Теорема 3. *Пусть группа $G = HK$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если H и K Jc-сверхразрешимы и коммутант G' Jca-сверхразрешим, то G Jc-сверхразрешима.*

Следствие 8. *Пусть группа $G = HK$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если H и K c-сверхразрешимы и коммутант G' ca-сверхразрешим, то G c-сверхразрешима.*

Следствие 9. [20] *Пусть группа $G = HK$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если H и K Jc-сверхразрешимы и коммутант G' J-квазинильпотентен, то G Jc-сверхразрешима.*

Следствие 10 ([15])**.** *Пусть группа $G = HK$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп H и K. Если H и K c-сверхразрешимы и коммутант G' квазинильпотентен, то G c-сверхразрешима.*

2. Предварительные результаты

Используется стандартная теоретико-групповая терминология из монографий [6, 8]. Напомним понятия и обозначения, существенные в работе.

Формацией называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *нормально наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее нормальные подгруппы; *разрешимо насыщенной*, если из $G/\Phi(N) \in \mathfrak{F}$ для разрешимой нормальной подгруппы N группы G всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга — это формация $\mathfrak{F}$, которая является классом Фиттинга, т. е. $\mathfrak{F}$ есть нормально наследственная формация и из условий $N_i \trianglelefteq G$, $N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$ и $G = N_1N_2$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Через $\mathfrak{J}$ обозначается класс всех простых групп; $\mathfrak{N}_p$ — класс всех p-групп для некоторого простого p; $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп; $\mathfrak{A}(p-1)$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$; $\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$ — класс всех A-групп, т. е. групп с абелевыми силовскими подгруппами. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$ является наследственной формацией.

Отображение $f : \mathfrak{J} \to \{\text{формации}\}$ называется *композиционным экраном*. Формация $\mathfrak{F}$ называется *композиционной*, если она имеет хотя бы один композиционный экран f такой, что $\mathfrak{F} = (G \mid G/C_G(H/K) \in f(A)$ для любого главного фактора H/K группы G и любого композиционного фактора A из $H/K)$. В случае, когда $|A| = p$, вместо $f(A)$ используется обозначение $f(p)$.

Внутренним композиционным экраном формации $\mathfrak{F}$ называется такой композиционным экран f, что $f(N) \subseteq \mathfrak{F}$ для любого композиционного фактора N группы G. Экран f называется *максимальным внутренним композиционным экраном* формации $\mathfrak{F}$, если f является максимальным элементом множества всех внутренних композиционных экранов формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 1. [8, гл. A, предложение 4.13] (*a*) *Характеристически простая группа является прямым произведением подгрупп, которые изоморфны фиксированной простой группе.*

(*b*) *Пусть $G = G = G_1 \times \cdots \times G_r$, где каждая G_i — неабелева простая группа. Подгруппа S субнормальна в G тогда и только тогда, когда она есть (прямое) произведение подмножества факторов G_i.*

(*c*) *Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G и $N \leq M \trianglelefteq G$. Тогда N — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп из M.*

Лемма 2. [16, гл. I, теорема 1.4] *Пусть H/K — p-главный фактор группы G. Тогда и только тогда $|H/K| = p$, когда $\mathrm{Aut}_G(H/K) \in \mathfrak{A}(p-1)$.*

Лемма 3. [6, лемма 3.9, п. 1] *Если H/K — главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит нееденичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G) \subseteq C_G(H/K)$.*

Лемма 4. [6, теорема 3.1] *Композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний композиционный экран f, причем f обладает следующими свойствами:*

1) *$f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p;*
2) *$f(H) = \mathfrak{F}$ для любой неабелевой элементарной группы H.*

Лемма 5. [11, Лемма 1] *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и N — минимальная нормальная подгруппа группы G такая, что $|N| = p^\alpha$ для некоторого простого числа p. Если N содержится в подгруппе H из G и $H/C_H(U/V) \in \mathfrak{F}$ для любого H-главного фактора U/V группы N, то $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{F}$.*

3. Доказательства основных результатов

Лемма 6. *Пусть J — некоторый класс простых групп, H/K — главный фактор группы G такой, что $B \leq K < H \leq A$, где A и B — нормальные подгруппы группы G и A/B — прямое произведение неабелевых простых групп из J. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *H/K — главный J-фактор группы G;*

2) *если $x \in G$ и x индуцирует внутренний автоморфизм A/B, то x индуцирует внутренний автоморфизм H/K.*

Доказательство. Утверждение 1) следует из леммы 1.

2) Пусть $x \in G$ и x индуцирует внутренний автоморфизм A/B. Тогда найдется $aB \in A/B$, $a \in A$ такой, что $(A/B)^{aB} = A/B$. По условию $A/B = A_1/B \times \cdots \times A_n/B$, где $A_1/B, \ldots, A_n/B$ — неабелевы простые группы из J. По лемме 1 $H/B = A_{i_1}/B \times \cdots \times A_{i_m}/B$, где $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Заметим, что $aB = a_1B \cdots a_nB$ для некоторых $a_iB \in A_i/B$, $a_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$. Так как $(a_iB)(a_jB) = (a_jB)(a_iB)$, получаем, что $(H/B)^{aB} = (H/B)^{hB}$, где $hB = a_{i_1}B \cdots a_{i_m}B$ и $a_{i_k} \in A_{i_k}, k = 1, \ldots, m$. Из $(H/K)^{hK} = H/K$ следует, что x индуцирует внутренний автоморфизм H/K. $\square$

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{N}^*_J, \mathfrak{U}_{Jc}, \mathfrak{S}_{Jac}, \mathfrak{U}_{Jac}\}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$.*

2) *Если $N_i \trianglelefteq G$ и $G/N_i \in \mathfrak{F}$ для $i = 1, 2$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.*

3) *Если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

4) *Класс групп $\mathfrak{F}$ является композиционной формацией и имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что
если $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{N}^*_J, \mathfrak{S}_{Jac}, \mathfrak{U}_{Jac}\}$, то*

$$h(N) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p, & \text{если } N \in J \text{ и } N \text{ — группа простого порядка } p; \\ \mathfrak{F}, & \text{если либо } N \notin J \text{ и } N \text{ — группа простого порядка,} \\ & \text{либо } N \text{ — простая неабелева группа,} \end{cases}$$

если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_{Jc}$, то

$$h(N) = \begin{cases} \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1), & \text{если } N \in J \text{ и } N \text{ — группа простого порядка } p; \\ \mathfrak{F}, & \text{если либо } N \notin J \text{ и } N \text{ — группа простого порядка,} \\ & \text{либо } N \text{ — простая неабелева группа.} \end{cases}$$

5) *$\mathfrak{F}$ разрешимо насыщена.*

Доказательство. 1) Пусть $R/N/L/N$ — главный J-фактор группы G/N. Из G-изоморфизма $R/N/L/N \simeq R/L$ следует, что R/L — главный J-фактор группы G. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^*_J$ и $xN \in G/N$, $x \in G$, то x индуцирует внутренний автоморфизм R/L. Тогда ясно, что xN индуцирует внутренний автоморфизм $R/N/L/N$. Поэтому $G/N \in \mathfrak{N}^*_J$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_{Jc}$, то $R/N/L/N$ — простая группа и $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Если $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{S}_{Jac}, \mathfrak{U}_{Jac}\}$, то ввиду теорем 1 и 2 из [16, приложение B] $G/N \in \mathfrak{F}$.

2) Утверждение следует из того, что каждый главный J-фактор группы $G/N_1 \cap N_2$ G-изоморфен либо главному J-фактору группы G/N_1, либо главному J-фактору группы G/N_2.

3) Пусть H/K — главный J-фактор группы N. В G найдется главный фактор A/B такой, что $B \leq K < H \leq A$. Так как A/B является прямым произведением изоморфных простых групп, A/B — главный J-фактор группы G.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_J^*$ и $x \in N$. Из $G \in \mathfrak{N}_J^*$ следует, что x индуцирует внутренний автоморфизм A/B. Если A/B абелев, то x индуцирует тождественный автоморфизм A/B. Следовательно, x индуцирует тождественный автоморфизм H/K. Если A/B неабелев, то по лемме 1 x индуцирует внутренний автоморфизм H/K. Следовательно, $N \in \mathfrak{N}_J^*$.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{Jac}$ и H/K — абелева p-группа для некоторого простого p. Тогда A/B — абелева p-группа. Из $G \in \mathfrak{S}_{Jac}$ следует, что $1 = G/C_G(A/B)$. Поэтому $A/B \leq Z(G/B)$ и $A/B \leq Z(N/B)$. Тогда $H/B/K/B \leq Z(N/B/K/B)$. Откуда получаем, что $H/K \leq Z(N/K)$. Это означает, что H/K — центральный фактор группы N и $N \in \mathfrak{S}_{Jac}$.

Пусть $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{U}_{Jc}, \mathfrak{U}_{Jac}\}$. Тогда A/B — простая группа. Так как $H/B \trianglelefteq A/B$ и $K/B \trianglelefteq A/B$, заключаем, что $H = A$ и $K = B$, т. е. H/K — простая группа. Поэтому, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_{Jc}$, то $N \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Допустим, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_{Jac}$ и фактор H/K абелев. Из $G \in \mathfrak{U}_{Jac}$ следует, что $A/B = H/K$ централен в G, а значит, и в N. Поэтому $N \in \mathfrak{U}_{Jac}$.

4) Из доказанных выше пунктов 1) и 2) следует, что $\mathfrak{F}$ — формация. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, у которых главные факторы h-центральны.

Предположим, что множество $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$ непусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Так как $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ являются формациями, в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $N = G^{\mathfrak{F}}$. Из выбора G следует, что N является J-фактором.

Пусть N — неабелева группа. Если $N = G$, то G — простая группа и $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Будем считать, что $N \neq G$. По лемме 1 $N = N_1 \times \dots \times N_m$, где $N_1, \dots, N_m$ — изоморфные простые неабелевы группы. Заметим, что $C_G(N) \cap N \trianglelefteq G$. Из неабелевости и минимальности N следует, что $C_G(N) = 1$. Так как $G \in \mathfrak{X}$, то $G \simeq G/C_G(N) \in f(N_1) = \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G.

Пусть N — абелева p-группа для некоторого простого числа p. Из $G \in \mathfrak{X}$ следует, что $G/C_G(N) \in h(p)$.

Допустим, что $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{N}_J^*, \mathfrak{S}_{Jac}, \mathfrak{U}_{Jac}\}$. Тогда $h(p) = \mathfrak{N}_p$. По лемме 3 $G/C_G(N) = 1$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}$ получаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G.

Пусть теперь $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_{Jc}$. Тогда $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Из леммы 3 следует, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{A}(p-1)$. По лемме 2 N — циклическая группа порядка p. Так как $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Это противоречит выбору G.

Таким образом, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$.

Предположим теперь, что множество $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{X}$ непусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Можно считать, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа K, причем $K = G^{\mathfrak{X}}$.

Если K — неабелева группа, то $C_G(K) = 1$ и $K = K_1 \times \dots \times K_n$, где $K_1, \dots, K_n$ — изоморфные простые неабелевы группы. Тогда $G/C_G(K) \simeq G \in \mathfrak{F} = h(K_1)$, т. е. главный фактор K является h-центральным в G. Отсюда и из $G/K \in \mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Получили противоречие с выбором G.

Пусть K — абелева p-группа для некоторого простого p.

Допустим, что K не является J-фактором группы G. Тогда из $h(p) = \mathfrak{F}$ и $G/C_G(K) \in \mathfrak{F}$ следует, что K является h-центральным главным фактором группы G. Поэтому $G \in \mathfrak{X}$. Это противоречит выбору G.

Предположим, что K — главный J-фактор группы G.

Пусть $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{N}^*_J, \mathfrak{S}_{Jac}, \mathfrak{U}_{Jac}\}$. Ввиду абелевости K заключаем, что $G/C_G(K) \simeq 1 \in \mathfrak{N}_p = h(p)$. Отсюда и из $G/K \in \mathfrak{X}$ следует, что $G \in \mathfrak{X}$. Это противоречит выбору G.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_{Jc}$. Из $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$ следует, что $|K| = p$. Тогда $G/C_G(K) \simeq \mathrm{Aut}_G(K)$ изоморфна подгруппе циклической группы порядка $p-1$. Поэтому $G/C_G(K) \in \mathfrak{A}(p-1) = h(p)$. Значит, K является h-центральным главным фактором в G. Из $G/K \in \mathfrak{U}_{Jc}$ следует, что $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Это противоречие завершает доказательство того, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$.

Тем самым равенство $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}$ доказано.

Из задания h следует, что h — внутренний экран. Из леммы 4 заключаем, что h — максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$.

5) Ввиду пункта 4) и теоремы 4.12 из [8, гл. IV] формация $\mathfrak{F}$ является разрешимо насыщенной. □

Предложение 2. *Пусть либо $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{N}^*_J, \mathfrak{S}_{Jac}, \mathfrak{U}_{Jac}\}$, либо $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_{Jc}$ и J не содержит абелевых групп. Если $N_i \trianglelefteq G$, $N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$ и $G = N_1N_2$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $|G|$.

Из пунктов 1) и 2) предложения 1 следует, что $\mathfrak{F}$ — формация. Поэтому из $G/N_i \in \mathfrak{F}$ для $i = 1, 2$ заключаем, что $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$. Для $N_1 \cap N_2 = 1$ получаем, что $G = N_1N_2 \in \mathfrak{F}$. Поэтому допустим, что $N_1 \cap N_2 \neq 1$. Пусть K — минимальная нормальная подгруппа группы G и $K \leq N_1 \cap N_2$. Из $N_i/K \trianglelefteq G/K, N_i/K \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$ по индукции следует, что $G/K = N_1N_2/K \in \mathfrak{F}$. Если K не является главным J-фактором группы G, то $G \in \mathfrak{F}$. Допустим, что K — главный J-фактор группы G. Из $K \leq N_1$ по лемме 1 следует, что $K = T_1 \times \cdots \times T_s$, где T_i — минимальная нормальная подгруппа группы N_1 для $i = 1, \ldots, s$. Ввиду $K \leq N_2$ и леммы 1 $K = U_1 \times \cdots \times U_k$, где U_j — минимальная нормальная подгруппа группы N_2 для $j = 1, \ldots, k$.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}^*_J$ и $x \in G$. Тогда $x = n_1n_2$ для некоторых $n_i \in N_i$, $i = 1, 2$. Элемент x индуцирует автоморфизм группы K. Так как T_j — минимальная нормальная подгруппа группы N_1 и T_j является главным J-фактором в N_1, из $N_1 \in \mathfrak{N}^*_J$ заключаем, что n_1 индуцирует внутренний автоморфизм T_j, $j = 1, \ldots, s$. Тогда $(T_j)^{y_j} = T_j$ для некоторого $y_j \in T_j$, $j = 1, \ldots, s$. Из того, что U_l — минимальная нормальная подгруппа группы N_2 и U_l является главным J-фактором в N_2, следует, что n_2 индуцирует внутренний автоморфизм U_l, $l = 1, \ldots, k$. Это означает, что $(U_l)^{z_l} = U_l$ для некоторого $z_l \in U_l$, $l = 1, \ldots, k$.

Если K — абелева группа, то T_j и U_l являются абелевыми группами, $j = 1, \ldots, s$, $l = 1, \ldots, k$. Тогда $y = y_1 \cdots y_s$ действует тождественно на T_j, $j = 1, \ldots, s$ и n_1 индуцирует тождественный автоморфизм группы K. Элемент $z = z_1 \cdots z_k$ действует тождественно на U_l, $l = 1, \ldots, k$. Поэтому n_2 индуцирует тождественный автоморфизм группы K. Значит, $x = n_1n_2$ индуцирует тождественный автоморфизм K. Из $G/K \in \mathfrak{N}^*_J$ следует, что $G = N_1N_2 \in \mathfrak{N}^*_J$.

Допустим, что K — неабелева группа. Так как $T_j^y = T_j^{y_j}$ и $U_l^z = U_l^{z_l}$ для $j = 1, \dots, s, l = 1, \dots, k$, из $K^y = K = K^z$ следует, что n_1 и n_2 индуцируют внутренние автоморфизмы группы K. Поэтому $x = n_1 n_2$ индуцирует внутренний автоморфизм группы K. Ввиду $G/K \in \mathfrak{N}_J^*$ заключаем, что $G = N_1 N_2 \in \mathfrak{N}_J^*$.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{Jac}$ и K — абелева группа. Тогда T_j — абелев главный J-фактор группы $N_1 \in \mathfrak{S}_{Jac}$, $j = 1, \dots, s$ и U_l — абелев главный J-фактор группы $N_2 \in \mathfrak{S}_{Jac}$, $l = 1, \dots, k$. Поэтому $T_j \leq Z(N_1)$ и $U_l \leq Z(N_2)$ для любого $j = 1, \dots, s$ и $l = 1, \dots, k$. Так как $K = T_1 \times \cdots \times T_s = U_1 \times \cdots \times U_k$, получаем, что $G = C_G(K)$. Отсюда и из $G/K \in \mathfrak{S}_{Jac}$ следует, что $G = N_1 N_2 \in \mathfrak{S}_{Jac}$.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_{Jac}$. Из $N_i \in \mathfrak{U}_{Jac}$ для $i = 1, 2$, следует, что T_j и U_l являются простыми группами для любого $j = 1, \dots, s$ и $l = 1, \dots, k$.

Допустим, что K — неабелева группа. По лемме 1 $T_1 = U_m$ для некоторого $m \in \{1, \dots, k\}$. Тогда $T_1 \trianglelefteq N_1 N_1 = G$. Из минимальности K следует, что $K = T_1$.

Если K — абелева p-группа для некоторого простого p, то $|T_j| = |U_l| = p$ для $j = 1, \dots, s$, $l = 1, \dots, k$ и $s = k$. Так как $N_i \in \mathfrak{U}_{Jac}$ для $i = 1, 2$, имеем, что $N_1 = C_{N_1}(T_j)$ и $N_2 = C_{N_2}(U_l)$ для всех $j = 1, \dots, s$, $l = 1, \dots, s$. Из $K = T_1 \times \cdots \times T_s = U_1 \times \cdots \times U_s$ и $G = N_1 N_2$ заключаем, что $G = C_G(K)$. Тогда $T_1 \trianglelefteq G$. Ввиду минимальности K получаем, что $K = T_1$. Из $G/K \in \mathfrak{U}_{Jac}$, следует, что $G = N_1 N_2 \in \mathfrak{U}_{Jac}$.

Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_{Jc}$ и J не содержит абелевых групп. Тогда K — неабелева группа. Так как $N_i \in \mathfrak{U}_{Jc}$ для $i = 1, 2$, группы T_j и U_l являются простыми группами для любого $j = 1, \dots, s$ и $l = 1, \dots, k$. Отсюда и из леммы 1 следует, что $T_1 = U_m = K$ для некоторого $m \in \{1, \dots, k\}$. Тогда из $G/K \in \mathfrak{U}_{Jc}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. □

Доказательство теоремы 1.

Доказательство. Утверждение 1) теоремы следует из предложений 1 и 2.

Утверждение 2) теоремы получается из предложения 1.

Утверждение 3) теоремы следует из пунктов 1)–3) предложения 1 и предложения 2.

Докажем утверждение 4). Ясно, что $\mathfrak{U}_{Jca} \subseteq \mathfrak{U}_{Jc}$ и $\mathfrak{U}_{Jca} \subseteq \mathfrak{S}_{Jca}$. Ввиду пунктов 2)–4) определения 1 в общем случае $\mathfrak{U}_{Jca} \neq \mathfrak{U}_{Jc}$ и $\mathfrak{U}_{Jca} \neq \mathfrak{S}_{Jca}$.

Докажем, что $\mathfrak{N}_J^* \subseteq \mathfrak{U}_{Jca}$. Пусть G — группа наименьшего порядка такая, что $G \in \mathfrak{N}_J^* \backslash \mathfrak{U}_{Jac}$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа из G. Если $N = G$, то G — простая группа и $G \in \mathfrak{U}_{Jac}$. Это противоречит выбору G. Предположим, что $N \neq G$. Ввиду пунктов 1) и 2) предложения 1 $\mathfrak{N}_J^*$ и $\mathfrak{U}_{Jac}$ являются формациями. Поэтому $G/N \in \mathfrak{U}_{Jac}$.

Если N не является J-группой, то $G \in \mathfrak{U}_{Jac}$. Получили противоречие с выбором G.

Пусть N — J-группа. Возьмем $g \in G$. Автоморфизм группы N, индуцируемый элементом g, является внутренним автоморфизмом, индуцируемым некоторым элементом $n \in N$. Тогда $gn^{-1} \in C_G(N)$. Следовательно, $G = NC_G(N)$. Из минимальности N следует, что $N = N_1 \times \cdots \times N_t$ — произведение изоморфных простых групп N_i, $i = 1, \dots, t$. Заметим, что $C_G(N) \subseteq C_G(N_i)$. Тогда $G = N_i C_G(N_i)$, $i = 1, \dots, t$. Следовательно, $N_i \trianglelefteq G$. Поэтому $t = 1$ и N — простая J-группа. Если N — неабелева группа, то из $G/N \in \mathfrak{U}_{Jac}$ следует, что $G \in \mathfrak{U}_{Jac}$. Это противоречит выбору G. Если N — абелева группа, то $G = C_G(N)$. Это означает, что N в G является центральным главным J-фактором. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{U}_{Jac}$ следует, что $G \in \mathfrak{U}_{Jac}$. Получили противоречие с выбором G. Итак, доказано, что $\mathfrak{N}^*_J \subseteq \mathfrak{U}_{Jca}$.

В общем случае $\mathfrak{N}^*_J \neq \mathfrak{U}_{Jca}$. Например, для $J = (S_5, Z_2)$ симметрическая группа S_5 на 5 символах принадлежит $\mathfrak{U}_{Jca}$, но не принадлежит $\mathfrak{N}^*_J$. $\square$

Доказательство теоремы 2.

Доказательство. 1) Пусть G — контрпример наименьшего порядка к утверждению 1) теоремы. Для любой минимальной нормальной подгруппы N группы G все условия утверждения 1) выполняются. Поэтому $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$. По теореме 1 $\mathfrak{U}_{Jc}$ является формацией. Значит, N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $N \leq H \cap K$. Из выбора G следует, что N — главный J-фактор группы G. По 3) леммы 1 подгруппа $N = T_1 \times \cdots \times T_s = U_1 \times \cdots \times U_k$, где T_i и U_j являются минимальными нормальными подгруппами групп H и K соответственно, $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, k$.

Пусть N — абелева p-группа для некоторого простого числа p. Из $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$ и $K \in \mathfrak{U}_{Jc}$ следует, что $|T_i| = p$ и $|U_j| = p$ для любого $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, k$ и $s = k$. Пусть U/V — любой H-главный фактор группы N. Так как $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$, то $H/C_H(U/V) \in h(p)$, где h — максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{U}_{Jc}$. Тогда $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$ и по лемме 5 $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Ввиду симметричности условий, наложенных на H и K, получаем, что $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Группа $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N)$ и $HC_G(N)/C_G(N) \simeq H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$, $KC_G(N)/C_G(N) \simeq K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$.

Обозначим $G/C_G(N) = \bar{G}$, $HC_G(N)/C_G(N) = \bar{H}$ и $KC_G(N)/C_G(N) = \bar{K}$. Так как $\bar{G}$ разрешима и G/H и G/K не имеют общих (с точностью до изоморфизма) абелевых композиционных факторов, заключаем, что $(|\bar{G} : \bar{H}|, |\bar{G} : \bar{K}|) = 1$. Из $\bar{H}/O_p(\bar{H}) \in \mathfrak{A}(p-1)$, $\bar{K}/O_p(\bar{K}) \in \mathfrak{A}(p-1)$ и $O_p(\bar{H})O_p(\bar{K}) \trianglelefteq \bar{G}$ заключаем, что $\bar{G}/O_p(\bar{H})O_p(\bar{K}) \in \mathfrak{A}(p-1)$. Откуда получаем, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1) = h(N)$. Следовательно, фактор N является h-центральным в G. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$ следует, что $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Это противоречит выбору G.

Если N — неабелева группа, то по лемме 1 $T_1 = U_j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$. Тогда $T_1 \trianglelefteq G$. Откуда получаем, что $T_1 = N$ и $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Это противоречие завершает доказательство утверждения 1).

2) Пусть G — контрпример наименьшего порядка к утверждению 2) теоремы. Тогда G обладает единственной минимальной нормальной подгруппой N, причем $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$, $N \leq H \cap K$ и N является главным J-фактором группы G.

Предположим, что N — абелева p-группа для некоторого простого p. Покажем, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$. По условию G есть расширение Jca-разрешимой группы с помощью A-группы. Поэтому $G^{\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}} \in \mathfrak{S}_{Jca}$. Обозначим $L = G^{\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}}$. Тогда $L/C_L(U/V) = 1$ для любого L-главного фактора U/V группы N. Из леммы 5 заключаем, что $L/C_L(N) \in \mathfrak{N}_p$. Тогда группа $G/C_L(N)$ является расширением p-группы $L/C_L(N)$ с помощью A-группы G/L. Поэтому $G/C_L(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$. Так как $C_L(N) \leq C_G(N)$, получаем, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$.

По лемме 3 $O_p(G/C_G(N)) = 1$. Поэтому $G/C_G(N) \in \mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$.

Пусть h — максимальный внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{U}_{Jc}$. По условию $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Поэтому $H/C_H(U/V) \in h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$ для любого H-главного фактора U/V группы N. Ввиду леммы 5 $H/C_H(N) \in$

$\mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Так как на H и K наложены симметричные условия, получаем, что $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Обозначим $\bar{G} = G/C_G(N)$, $\bar{H} = HC_G(N)/C_G(N)$ и $\bar{K} = KC_G(N)/C_G(N)$. Тогда $\bar{G} = \bar{H}\bar{K}$, где $\bar{H} \simeq H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$ и $\bar{K} \simeq K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Так как $O_p(\bar{H})$ и $O_p(\bar{K})$ являются нормальными подгруппами группы $\bar{G}$, получаем, что $O_p(\bar{H}) = 1$ и $O_p(\bar{K}) = 1$. Тогда $\bar{H} \in \mathfrak{A}(p-1)$ и $\bar{K} \in \mathfrak{A}(p-1)$. Любая силовская q-подгруппа Q группы $\bar{G}$ имеет вид $Q = Q_1Q_2$, где Q_1 и Q_2 — некоторые силовские q-подгруппы групп $\bar{H}$ и $\bar{K}$ соответственно. Из $\bar{G} \in \mathfrak{A}^{\mathbb{P}}$ следует, что $\bar{G} \in \mathfrak{A}(p-1)$. Это означает, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1) = h(p)$, т. е. главный фактор N является h-центральным в G. Из $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$ получаем $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Это противоречит выбору G.

Пусть N — неабелева группа. Тогда N является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп из H и прямым произведением минимальных нормальных подгрупп из K. Из $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$, $K \in \mathfrak{U}_{Jc}$ и леммы 1 следует, что N — простая группа. Ввиду $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$ получаем, что $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Это противоречит выбору G. Утверждение 2) доказано.

3) Пусть G — контрпример наименьшего порядка к утверждению 3) теоремы. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Для G/N условия утверждения 3) теоремы выполняются. Поэтому G/N является Jc-сверхразрешимой. Так как $\mathfrak{U}_{Jc}$ — формация, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $N = G^{\mathfrak{U}_{Jc}}$. Поэтому $N \leq H \cap K$ и N является главным J-фактором в G.

Предположим, что N — p-группа для некоторого простого p. Тогда любой H-главный фактор U/V группы N является абелевым J-фактором. Из $H \in \mathfrak{U}_{Jca}$ получаем, что $H/C_H(U/V) = 1$. По лемме 5 $H/C_H(N)$ является p-группой. Подгруппа $K \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Поэтому для любого K-главного фактора R/L группы N имеем $K/C_K(R/L) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. По лемме 5 имеем $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Таким образом, группа $G/C_G(N)$ есть произведение p-группы $HC_G(N)/C_G(N)$ и $\mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$-группы $KC_G(N)/C_G(N)$. Отсюда следует, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Это означает, что фактор $N = G^{\mathfrak{U}_{Jc}}$ является h-центральным в G. Получили противоречие с выбором G.

Если N — неабелева группа, то из $N \leq H \in \mathfrak{U}_{Jca}$, $N \leq K \in \mathfrak{U}_{Jc}$ и леммы 1 следует, что N — простая группа. Ввиду $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$ получаем, что G Jc-сверхразрешима. Это противоречит выбору G. Утверждения 3) доказано. □

Для доказательства теоремы 3 нам потребуются следующие результаты.

Лемма 7. [19, лемма 4.3.3] *Пусть $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если N — максимальная нормальная подгруппа группы G, то $\{AN, BN, (A \cap B)N\} \subseteq \{N, G\}$.*

2. *Если N — неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$ и $N = (N \cap A)(N \cap B)$.*

3. *Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $N \leq A \cap B$ или $[N, A \cap B] = 1$.*

4. *Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$.*

5. *Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в A, и $B \cap N = 1$, то $N \leq C_G(A)$ или $N \leq C_G(B)$. Кроме того, если N нециклическая, то $N \leq C_G(B)$.*

Из леммы 4.1.10 [19] следует

Лемма 8. *Если группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B и $N \trianglelefteq G$, то $G/N = AN/N \cdot BN/N$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп AN/N и BN/N.*

Лемма 9. [19, теорема 4.3.11] *Пусть нетривиальная группа $G = AB$ есть произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B. Тогда A_GB_G не тривиально.*

Доказательство теоремы 3.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и пусть G — контрпример наименьшего порядка. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Без потери общности можно предположить, что $G \neq N$. По лемме 8 фактор-группа $G/N = HN/N \cdot KN/N$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп HN/N и KN/N. Так как $HN/N \simeq H/H \cap N \in \mathfrak{U}_{Jc}$, $KN/N \simeq K/K \cap N \in \mathfrak{U}_{Jc}$ и коммутант $(G/N)'$ Jca-сверхразрешим, для G/N условия теоремы выполняются. По выбору G имеем, что $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Так как $\mathfrak{U}_{Jc}$ — формация, N является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G.

Из $G \notin \mathfrak{U}_{Jc}$ заключаем, что N — J-группа, причем N абелева и $|N| = p^n$ для некоторого простого p. По утверждению 4) предложения 1 формация $\mathfrak{U}_{Jc}$ имеет максимальный внутренний композиционный экран h такой, что $h(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}(p-1)$. Ввиду леммы 7 рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $H \cap N = K \cap N = N$. Тогда $N \leq H \cap K$. Пусть U/V есть H-главный фактор группы N. Из $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$ следует, что $H/C_H(U/V) \in h(p)$. По леммам 4 и 5 $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Аналогично $K/C_K(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Тогда $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N)$ является произведением взаимно перестановочных подгрупп $HC_G(N)/C_G(N)$ и $KC_G(N)/C_G(N)$.

Так как $N \leq G'$ и $G' \in \mathfrak{U}_{Jac}$, по лемме 5 $G'/C_{G'}(N) \in \mathfrak{N}_p$. Следовательно, $G'/C_{G'}(N) \simeq (G/C_G(N))'$ является p-группой. Из $G/C_G(N)/(G/C_G(N))' \in \mathfrak{A}$ заключаем, что $G/C_G(N) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$. По лемме 3 $G/C_G(N) \in \mathfrak{A}$. Из $O_p(G/C_G(N)) = 1$ следует, что $HC_G(N)/C_G(N) \simeq H/C_H(N) \in \mathfrak{A}(p-1)$ и $KC_G(N)/C_G(N) \simeq K/C_K(N) \in \mathfrak{A}(p-1)$. Тогда $G/C_G(N) \in \mathfrak{A}(p-1) = h(p)$. Так как $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$, получаем, что $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Это противоречит выбору G.

2. Пусть $H \cap N = K \cap N = 1$. По лемме 9 $H_GK_G \neq 1$. Тогда либо $N \subseteq H_G \subseteq H$, либо $N \subseteq K_G \subseteq K$. Получили противоречие.

3. Пусть $H \cap N = N$ и $K \cap N = 1$. Допустим N не является циклической группой. Тогда $N \leq C_G(K)$ по пункту 5) леммы 7. Следовательно, $K \subseteq C_G(N)$ и $G/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \cdot KC_G(N)/C_G(N) = HC_G(N)/C_G(N) \simeq H/(C_G(N) \cap H) = H/C_H(N)$. Так как $N \subseteq H$ и $H \in \mathfrak{U}_{Jc}$, по лемме 5 $H/C_H(N) \in \mathfrak{N}_p h(p) = h(p)$. Из $G/C_G(N) \in h(p)$ и $G/N \in \mathfrak{U}_{Jc}$ следует, что $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$. Получили противоречие с выбором G.

Пусть N — циклическая группа. Тогда $|N| = p$ и $G/C_G(N)$ — циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Тогда $G/C_G(N) \in \mathfrak{A}(p-1) \subseteq h(p)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{U}_{Jc}$, получили противоречие.

4. Пусть $H \cap N = 1$ и $K \cap N = N$. Как в пункте 3 приходим к противоречию ввиду симметричности условий, наложенных на H и K. $\square$

Частично результаты данной работы были анонсированы в тезисах докладов [21].

References

[1] S.A. Chunikhin, L.A. Shemetkov, *Finite groups*, Algebra. Topology. Geometry 1969, VINITI, Moscow, 1978, 7–70 (in Russian).

[2] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite group* III, Springer-Verlag, 1982. Zbl 0514.20002

[3] W. Gaschütz, *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen*, Math. Z., **80**:4 (1963), 300–305. Zbl 0111.24402

[4] L.A. Shemetkov, *Two directions in the development of the theory of non-simple finite groups*, Russian Mathematical Surveys, **30**: 2 (1975), 185–206. Zbl 0319.20027

[5] L.A. Shemetkov, *Graduated formations of groups*, Mathematics of the USSR-Sbornik, **23**: 4 (1974), 593–611. Zbl 0323.20036

[6] L.A. Shemetkov, *Formations of finite groups*, Nauka, Moscow, 1978 (in Russian). Zbl 0496.20014

[7] L.A. Shemetkov, A.N. Skiba, *Formations of algebraic systems*, Nauka, Moscow, 1989 (in Russian). Zbl 0667.08001

[8] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite soluble groups*, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1992. Zbl 0753.20001

[9] A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro, *Classes of Finite Groups*, Springer-Verlag, 2006. Zbl 1102.20016

[10] V.A. Vedernikov, *On some classes of finite groups*, Dokl. Akad. Nauk BSSR, **32**: 10 (1988), 872–875. Zbl 0663.20016

[11] A.F. Vasil'ev, T.I. Vasil'eva, *On finite groups whose principal factors are simple groups*, Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika), **41**:11, (1997), 8–12. Zbl 0934.20016

[12] D.J.S. Robinson, *The structure of finite groups in which permutability is a transitive relation*, J. Austral. Math. Soc., **70** (2001), 143–149. Zbl 0997.20027

[13] A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, *Totally permutable products of finite groups satisfying SC and PST*, Monatsh. Math., **145** (2005), 89–94. Zbl 1103.20014

[14] J.C. Beidleman, P. Hauck, H. Heineken, *Totally permutable products of certain classes of finite groups*, J. Algebra, **276** (2004), 826–835. Zbl 1066.20024

[15] A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M.C. Pedraza-Aguilera, *On mutually permutable products of finite groups*, J. Algebra, **284** (2005), 127–135. Zbl 1083.20020

[16] *Between nilpotent and solvable* / Ed. by M. Weinstein, Polygonal Publ. House, Passaic, 1982. Zbl 0488.20001

[17] R. Baer, *Classes of finite groups and their properties*, Illinois J. Math., **1**:2 (1957), 115–187. Zbl 0077.03003

[18] V.S. Monakhov, I.K. Chirik, *On the p-supersolvability of a finite factorizable group with normal factors*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **21**:3 (2015), 256–267.

[19] A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, M. Asaad, *Products of Finite Groups*, Walter de Gruyter, Berlin/New York, 2010. Zbl 1206.20019

[20] E.N. Myslovets, *On mutually permutable products of generalized supersoluble subgroups of finite groups*, Asian-European Journal of Matematics, **9**:3 (2016), 1650054-1-1650054-10. Zbl 06624789

[21] A.F. Vasil'ev, T.I. Vasil'eva, *On finite groups with given properties of the chief series*, International Scientific Conference "Discrete mathematics, algebra and their applications"(Republic of Belarus, Minsk, October 19-22, 2009), Abstracts (2009) 12–14 (in Russian).

Alexander Fedorovich Vasil'ev
F. Scorina Gomel State University,
Sovetskaya str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
E-mail address: formation56@mail.ru

Tatsiana Ivanovna Vasil'eva
Belarusian State University of Transport,
Kirova str., 34,
246653, Gomel, Republic of Belarus
E-mail address: tivasilyeva@mail.ru

Evgeniy Nikolaevich Myslovets
F. Scorina Gomel State University,
Sovetskaya str., 104,
246019, Gomel, Republic of Belarus
E-mail address: myslovets@gmail.com