

В. С. РЕТАХ

О ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 13 VI 1972)

1. Пусть E — локально выпуклое пространство*, $(x_k)_{k=1}^\infty$ — линейно независимая последовательность элементов из E , а $(c_k)_{k=1}^\infty$ — числовая последовательность. Задачу о нахождении непрерывного линейного функционала f на E такого, что $f(x_k) = c_k$. Б. М. Макаров⁽¹⁾ называет проблемой моментов относительно (x_k) и (c_k) . Если для заданной последовательности (x_k) и любой числовой последовательности проблема моментов разрешима, то будем говорить, что проблема моментов для последовательности (x_k) разрешима.

2. Пусть $(X_k)_{k=1}^\infty$ — возрастающая $(X_k \subset X_{k+1})$ последовательность линейных подпространств в E (топология на X_k индуцирована из E). Если на каждом X_k задан непрерывный линейный функционал f_k такой, что $f_k|_{X_{k-1}} = f_{k-1}$, то будем говорить, что на $(X_k)_{k=1}^\infty$ задана согласованная последовательность функционалов. Если для каждой такой последовательности (f_k) можно указать непрерывный линейный функционал f на E такой, что $f|_{X_k} = f_k$, то будем говорить, что проблема моментов для последовательности (X_k) разрешима.

3. Отметим несколько задач, решение которых сводится к решению соответствующих проблем моментов. Пусть в сопряженном E' к локально выпуклому пространству E задана последовательность функционалов $(g_k)_{k=1}^\infty$. Сопоставим каждому $x \in E$ числовую последовательность $(g_k(x))_{k=1}^\infty$; получим непрерывное отображение E в пространство числовых последовательностей s . Обратно, по каждому отображению $g: E \rightarrow s$ строится последовательность элементов (g_k) из E' , определяющих это отображение.

Таким образом, вопрос об эпиморфности g эквивалентен вопросу о разрешимости проблемы моментов относительно $(g_k)_{k=1}^\infty$, если наделить E' слабой топологией.

4. Пусть $(F_k, F_{k+1} \xrightarrow{\alpha_k} F_k)_{k=1}^\infty$ — обратный спектр локально выпуклых пространств, $F = \varprojlim F_k$. Пусть $A_k: E \rightarrow F_k$, $k = 1, 2, \dots$, — непрерывные линейные отображения локально выпуклого пространства E такие, что $\alpha_k A_{k+1} = A_k$. Положим $A = \varprojlim A_k$. Предположим, что все A_k эпиморфны. Будет ли A эпиморфизмом?

Вопрос об эпиморфности A сводится к вопросу о разрешимости проблемы моментов для последовательности подпространств $(\text{Im } A_k)_{k=1}^\infty$ в пространстве E' , наделенном слабой топологией.

Очевидно, что задача о разрешимости проблемы моментов включает задачу о непрерывности секвенциально непрерывных функционалов на подпространстве строгого счетного индуктивного предела метризуемых локально выпуклых пространств.

* Все встречающиеся ниже пространства предполагаются отделимыми.

5. Пусть M — подмножество локально выпуклого пространства E , через E_M обозначим линейную оболочку M в E , через M^0 — поляр M в E' , через M^{00} — поляр M^0 в E'' (сопряженном к E' , наделенному сильной топологией).

Теорема 1. В обозначениях п. 2 пусть сильное сопряженное к E есть пространство Фреше. Проблема моментов относительно последовательности $(X_k)_k^\infty$ разрешима тогда и только тогда, когда для любого ограниченного множества B в E существует натуральное i такое, что

$$X_{i+j}^{00} \cap E_{B^{00}}'' \subset X_i^{00}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Следствие. Пусть L — линейная оболочка последовательности линейно независимых элементов $(x_k)_{k=1}^\infty$ в E , удовлетворяющем условию теоремы. Проблема моментов для (x_k) разрешима тогда и только тогда, когда для любого ограниченного B $\dim(L \cap E_{B^{00}}') < \infty$. Если E полурефлексивно, то $E_{B^{00}}''$ можно заменить на E_B .

Это следствие обобщает некоторые результаты Б. М. Макарова ⁽¹⁾.

Отметим, что если в локально выпуклом пространстве E , удовлетворяющем условию теоремы, проблема моментов для любой последовательности линейно независимых элементов $(x_k)_{k=2}^\infty$ разрешима, то линейные оболочки ограниченных множеств из E конечномерны. Если E борпологично, то отсюда следует, что E' в сильной топологии изоморфно пространству s .

6. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. В обозначениях п. 4 пусть E — пространство Фреше и операторы $A_k, k = 1, 2, \dots$, эпиморфны.

Для эпиморфности A необходимо и достаточно, чтобы для всякой окрестности нуля U в E существовало натуральное i такое, что

$$\text{Im } A' \cap E_{U^0}' \subset \text{Im } A_i'. \quad (*)$$

7. **Примеры.** Если в качестве E взять пространство бесконечно дифференцируемых функций $\mathcal{E}(\Omega)$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, а в качестве F_m — пространство $\mathcal{E}(K_m)$, где $(K_m)_{m=1}^\infty$ возрастающая последовательность компактов в Ω , $\cup K_m = \Omega$, то условие $(*)$ в точности означает A -выпуклость области Ω (см. ⁽⁴⁾, стр. 392). Получаем, таким образом, необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения $Au = f$ в пространстве бесконечно дифференцируемых функций для любого непрерывного оператора (см. ⁽⁴⁾, теорема 38.2).

Пусть $\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, (y_1, \dots, y_{n-1}) \mapsto (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ — вложение евклидовых пространств. Рассмотрим отображение $B_k: \mathcal{E}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1})$, $B_k(\varphi) = \frac{\partial^k \varphi}{\partial y_n^k} \Big|_{y_n=0}$. В ситуации п. 4 положим $E = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $F_k = \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1}) \times \dots \times \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n-1})$, $A_k = B_1 \times \dots \times B_k$.

Будет ли A эпиморфизмом? Через $\delta^{(k)}$ обозначим производные дельта-функций вдоль y_n . Тогда $\text{Im } B_k'$ представимо в виде $\delta^{(k)} \otimes \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n-1})$. Для любой окрестности нуля U в $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ распределения из E_{U^0}' имеют порядок сингулярности не больше некоторого i , поэтому $\text{Im } B_{i+j}' \cap E_{U^0}' = \{0\}$, что по теореме 2 влечет эпиморфность A .

Аналогичную задачу для других классов основных функций позволяет решать приводимая ниже теорема 3.

8. Вернемся к ситуации п. 2. Вопрос о разрешимости проблемы моментов сводится к вопросу об эпиморфности соответствующего отображения $E' \rightarrow \varprojlim X_i'$, что позволяет применить методы из ⁽²⁾ и ⁽³⁾. Обобщение

используемых теорем может быть получено применением специального класса сетей Де Вилде ⁽⁵⁾, аналогично доказательству теоремы 3 из ⁽³⁾. Отсюда вытекает

Теорема 3. В обозначениях п. 4 пусть существуют мономорфные отображения $i_n: E_n \rightarrow E$, $n=1, 2, \dots$, где $\cup \text{Im } i_n = E$ и E_n — пространства Фреше. Для эпиморфности A необходимо и достаточно, чтобы при некотором n для любой окрестности нуля U из E_n существовало j такое, что $A(\text{Ker } A_j) \subset A(i_n U)$.

Если E_n — банаховы пространства, то последнее условие означает, что $A(\text{Ker } A_n) = \{0\}$.

Автор выражает благодарность М. А. Шубину за ценные обсуждения.

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
7 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. М. Макаров, ДАН, 127, № 5, 957 (1959). ² В. П. Паламонов, Матем. сборн., 75 (117), № 4, 567 (1968). ³ В. С. Ретах, ДАН, 194, № 6, 1277 (1970).
⁴ F. Trèves, Topological Vector Spaces Distributions and Kernels, N. Y., 1967.
⁵ M. De Wilde, Mém. soc. roy. sci., Liège, 18, № 2 (1969).