Известия вузов. Математика
2017, №6, с. 9–17 *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.Ф. ВАСИЛЬЕВ, Т.И. ВАСИЛЬЕВА, Д.Н. СИМОНЕНКО

О MP-ЗАМКНУТЫХ НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Аннотация. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется MP-замкнутым, если он содержит всякую группу $G = AB$ такую, что $\mathfrak{F}$-подгруппа A перестановочна с каждой подгруппой из B и $\mathfrak{F}$-подгруппа B перестановочна с каждой подгруппой из A. Доказано, что формация $\mathfrak{F}$, содержащая все сверхразрешимые группы, MP-замкнута тогда и только тогда, когда формация $F(p)$ MP-замкнута для любого простого p, где F — максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$. В частности, установлено, что формация всех групп со сверхразрешимыми подгруппами Шмидта MP-замкнута.

Ключевые слова: конечная группа, произведение взаимно перестановочных подгрупп, насыщенная формация, MP-замкнутая формация, локальный экран.

УДК: 512.542

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфизмов и подпрямых произведений, называется формацией.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация. Следующая задача является классической: найти условия, при которых $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, где $A, B \in \mathfrak{F}$. Еще в 1938 г. Г. Фиттинг в работе [1] доказал нильпотентность группы, являющейся произведением своих нормальных нильпотентных подгрупп. Этот результат послужил основой последующих исследований формаций, замкнутых относительно произведений заданных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Так в работе [2] было получено конструктивное описание всех разрешимых наследственных формаций $\mathfrak{F}$, содержащих всякую группу G, представимую произведением своих нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп. Наследственные формации $\mathfrak{F}$, замкнутые относительно произведений произвольных $\mathfrak{F}$-подгрупп, были найдены в работе [3]. В [4], [5] в классе всех разрешимых групп было получено описание нормально наследственных насыщенных формаций $\mathfrak{F}$, содержащих всякую группу $G = AB$ с абнормальными (контрнормальными, т. е. $A^G = G = B^G$) $\mathfrak{F}$-подгруппами A и B.

В последние годы активно изучаются произведения групп, у которых факторы связаны определенными условиями перестановочности для подгрупп.

Согласно ([6], с. 151) группа $G = AB$ называется *произведением взаимно перестановочных подгрупп* A и B, если A перестановочна с каждой подгруппой из B и B перестановочна с каждой подгруппой из A. Более того, если каждая подгруппа из A перестановочна с каждой подгруппой из B, то группа $G = AB$ называется *произведением тотально перестановочных подгрупп* A и B. В [7] было показано, что группа $G = AB$, где A и B —

Поступила 16.12.2015

тотально перестановочные сверхразрешимые подгруппы G, сама является сверхразрешимой. Этот результат оказался отправной точкой для исследований в работах [8], [9] (также [6], гл. 5) формаций $\mathfrak{F}$, замкнутых относительно произведений тотально перестановочных подгрупп. Отметим следующий результат из [9].

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, содержащая класс всех сверхразрешимых групп. Тогда $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB$, где A и B — тотально перестановочные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G.

Для краткости формулировок введем

Определение. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Класс $\mathfrak{F}$ назовем MP-замкнутым в $\mathfrak{X}$, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую $\mathfrak{X}$-группу $G = AB$, где A и B — взаимно перестановочные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G.

Пустой класс будем считать MP-замкнутым в любом классе $\mathfrak{X}$.

В случае, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ — класс всех групп, класс $\mathfrak{F}$ будем называть MP-замкнутым. Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп, то $\mathfrak{F}$ будем называть разрешимым MP-замкнутым классом.

Известно немного примеров MP-замкнутых формаций ([6], сс. 156, 162). В частности, таковыми являются формации всех π-групп, формации всех разрешимых π-групп, формации всех дисперсивных по Оре групп и некоторые др.

Возникает

Проблема. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация (класс Фиттинга, класс Шунка) и $\mathfrak{X}$ — класс групп, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. Для данного класса $\mathfrak{X}$ описать все формации (классы Фиттинга, классы Шунка) $\mathfrak{F}$, MP-замкнутые в $\mathfrak{X}$.

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Многие классические формации являются насыщенными, например, формации всех нильпотентных, всех сверхразрешимых, всех разрешимых групп и др. В. Гашюц [10] ввел понятие локальной формации, которое позволяет конструировать насыщенные формации. Согласно известной теореме Гашюца–Любезедер–Шмида семейства всех насыщенных и всех локальных формаций совпадают ([11], гл. IV, теорема 4.6).

В данной работе отмеченная выше проблема исследуется в случае, когда $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, а $\mathfrak{X}$ — класс всех групп.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — MP-замкнутая наследственная насыщенная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{H})$ и $\tau \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{S}_\tau\mathfrak{H}$ является MP-замкнутой формацией, когда для любого $p \in \tau \setminus \pi$ и любого $q \in \pi \setminus \tau$ число p не делит $q-1$.*

Следствие 1. Пусть простое число $q \notin \tau \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{S}_\tau\mathfrak{N}_q$ является MP-замкнутой формацией, когда p не делит $q-1$ для любого $p \in \tau$.

Следствие 2. Пусть $\mathfrak{H}$ — MP-замкнутая наследственная насыщенная формация и простое число $p \notin \pi(\mathfrak{H})$. Тогда и только тогда $\mathfrak{N}_p\mathfrak{H}$ является MP-замкнутой формацией, когда p не делит $q-1$ для любого $q \in \pi(\mathfrak{H})$.

Следствие 3. Пусть простое число $p \notin \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_\pi$ является MP-замкнутой формацией, когда p не делит $q-1$ для любого $q \in \pi$.

Следствие 4. Если $\pi = \{q \in \mathbb{P} \mid q < p\}$ или $\pi = \{q \in \mathbb{P} \mid q$ делит $p-1\}$, то $\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_\pi$ — MP-замкнутая формация.

Пусть p — простое число. Согласно [12] множество π называется p-специальным, если из условия p делит $q(q-1)$ всегда следует $q \notin \pi$.

Следствие 5 ([12], теорема 2)**.** Пусть π — p-специальное множество. Пусть группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных $\mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_\pi$-подгрупп A и B. Тогда $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_\pi$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые π-группы для $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\mathfrak{F}$ имеет полный локальный экран f такой, что $f(p)$ является MP-замкнутой формацией для любого простого p, то $\mathfrak{F}$ является MP-замкнутой формацией.*

2. *Пусть F — максимальный внутренний локальный экран $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ является MP-замкнутой тогда и только тогда, когда формация $F(p)$ является MP-замкнутой для любого простого p.*

Напомним ([13], с. 251), что группа G порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$ (p_i — простое число, $i = 1, 2, \dots, n$) называется *дисперсивной по Оре*, если $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 6 ([6], с. 162)**.** Пусть группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B. Если A и B дисперсивны по Оре, то G дисперсивна по Оре.

Группой Шмидта называется ненильпотентная группа, у которой каждая собственная подгруппа нильпотентна.

В работе [14] был исследован класс всех групп, у которых любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой, и, в частности, было установлено, что этот класс является наследственной насыщенной формацией Фиттинга, содержащей все сверхразрешимые группы.

Следствие 7. Пусть группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B. Если в A и B любая подгруппа Шмидта является сверхразрешимой, то любая подгруппа Шмидта группы G сверхразрешима.

1. Предварительные результаты

Используются обозначения и терминология из [6], [11], [13]. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

Пусть G — группа. Через $|G|$ обозначается порядок G; $\pi(G)$ — множество всех различных простых делителей $|G|$; $\mathrm{F}(G)$ — подгруппа Фиттинга; $\mathrm{F}_p(G)$ — произведение всех нормальных p-нильпотентных подгрупп из G для некоторого простого числа p; $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел; π — некоторое подмножество из $\mathbb{P}$; $O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная π-подгруппа группы G; $O_{p'}(G) = O_{\mathbb{P}\setminus\{p\}}(G)$ для простого числа p; $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{N}_p$ — класс всех p-групп; $\mathfrak{S}_\pi$ — класс всех разрешимых π-групп; $\mathfrak{G}_\pi$ — класс всех π-групп.

Формация $\mathfrak{F}$ называется *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит и все ее подгруппы. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$; $\pi(\mathfrak{F})$ — множество всех различных простых делителей порядков групп $G \in \mathfrak{F}$. Если группа (подгруппа) принадлежит $\mathfrak{F}$, то она называется $\mathfrak{F}$-группой ($\mathfrak{F}$-подгруппой).

Функция $f : \mathbb{P} \to \{$ формации $\}$ называется *локальным экраном.* Через $LF(f)$ обозначается класс всех групп G, у которых $G/C_G(H/K) \in f(p)$ для любого главного фактора H/K и каждого $p \in \pi(H/K)$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F} = LF(f)$. Экран f называется 1) *полным*, если $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p; 2) *внутренним*, если $f(p) \subseteq LF(f)$ для любого простого числа p; 3) *максимальным внутренним локальным экраном* формации $\mathfrak{F}$, если f является максимальным элементом множества всех внутренних локальных экранов формации $\mathfrak{F}$. Напомним, что всякая локальная формация имеет единственный максимальный внутренний локальный экран, причем он является полным.

Лемма 1 ([13], лемма 3.9)**.** *Если H/K — главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/\mathrm{C}_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $\mathrm{F}_p(G) \leq \mathrm{C}_G(H/K)$.*

Лемма 2 ([13], лемма 11.6)**.** *Пусть группа $G = G_1G_2$. Тогда для любого простого числа p существуют такие силовские p-подгруппы P, P_1 и P_2 соответственно в G, G_1 и G_2, что $P = P_1P_2$.*

Лемма 3 ([13], лемма 4.5)**.** *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/\mathrm{F}_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Лемма 4 ([6], лемма 4.3.3)**.** *Пусть $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если N — максимальная нормальная подгруппа группы G, то*

$$\{AN, BN, (A \cap B)N\} \subseteq \{N, G\}.$$

2. *Если N — неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G, то*

$$\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{N, 1\} \quad \text{и} \quad N = (N \cap A)(N \cap B).$$

3. *Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, то*

$$N \leq A \cap B \quad \text{или} \quad [N, A \cap B] = 1.$$

4. *Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$.*

5. *Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в A, и $B \cap N = 1$, то $N \leq \mathrm{C}_G(A)$ или $N \leq \mathrm{C}_G(B)$. Кроме того, если N нециклическая, то $N \leq \mathrm{C}_G(B)$.*

Из лемм 4.1.10 и 4.1.12 [6] следует

Лемма 5. *Пусть A и B — подгруппы группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B, то $G/N = AN/N\,BN/N$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп AN/N и BN/N.*

2. *Если $N \leq A \cap B$ и $G/N = A/N\,B/N$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A/N и B/N, то $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B.*

Лемма 6 ([6], лемма 4.1.21)**.** *Пусть группа $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп A и B. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если U — подгруппа из G, то $(U \cap A)(U \cap B)$ — подгруппа из G и $U \cap A$ и $U \cap B$ взаимно перестановочны.*

2. *Если U — нормальная подгруппа из G, то и $(U \cap A)(U \cap B)$ — нормальная подгруппа из G.*

3. *Если $X \leq A, Y \leq B$ и $X \cap Y = A \cap B$, то X и Y взаимно перестановочны. Более того,*

$$XY = (XY \cap A)(XY \cap B).$$

Заметим, что произведение MP-замкнутых формаций не всегда является MP-замкнутой формацией.

Пример. Пусть $p = 3$, $q = 7$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$. Формации $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_q$ являются MP-замкнутыми. Рассмотрим ненильпотентную группу $G = AB$, где $|A| = 3$ и $|B| = 7$. Тогда $A \in \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ и $B \in \mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{F}$. Так как $G^{\mathfrak{F}} = B$, группа G не принадлежит $\mathfrak{F}$.

Из ([11], гл. IV, 4.8 (g)) и того, что $\mathfrak{N}_p f(p) = \mathfrak{N}_p(\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{\pi(p)}) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{\pi(p)} = f(p)$ для любого простого p, следует

Предложение 1. *Пусть $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{\pi(p)}$ для любого простого p, где $\pi(p) = \{q \in \mathbb{P} \mid q < p\}$. Тогда f — полный локальный экран формации всех дисперсивных по Оре групп.*

Теорема 3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть G — ненильпотентная группа порядка p^aq^b, где $p > q$. Все подгруппы Шмидта сверхразрешимы тогда и только тогда в группе G, когда G p-замкнута и q делит $p-1$* ([14], лемма 5).

2. *В группе G все подгруппы Шмидта сверхразрешимы тогда и только тогда, когда G дисперсивна по Оре и для каждой пары простых чисел $p > q$, q не делит $p-1$, бипримарные $\{p, q\}$-холловы в G подгруппы нильпотентны* ([14], теорема 1).

Локальное задание класса всех групп со сверхразрешимыми подгруппами Шмидта устанавливает

Предложение 2. *Пусть $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_\pi$ для любого простого p, где $\pi = \{q \in \mathbb{P} \mid q$ делит $p-1\}$. Тогда f — полный локальный экран формации всех групп, у которых любая подгруппа Шмидта сверхразрешима.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{F} = (G \mid$ любая подгруппа Шмидта группы G является *сверхразрешимой*) и $\mathfrak{X} = LF(f)$, где $f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_\pi$, $\pi = \{q \in \mathbb{P} \mid q$ делит $p-1\}$ для любого простого p. Предположим, что $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{X}$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{X}$. По утверждению 2 теоремы 3 группа G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, $G/N \in \mathfrak{F}$. По выбору G получаем $G/N \in \mathfrak{X}$. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ заключаем, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$. Тогда $N = \mathrm{C}_G(N) = \mathrm{F}(G)$, $G = NM$, $N \cap M = 1$ для некоторой максимальной подгруппы M группы G. Из дисперсивности по Оре группы G и леммы 1 следует, что N — силовская p-подгруппа группы G, где p — наибольший простой делитель $|G|$. Рассмотрим любое простое число $q \in \pi(M)$ и силовскую q-подгруппу Q группы M. Из $N = \mathrm{C}_G(N)$ вытекает, что подгруппа NQ ненильпотентна. Ввиду наследственности $\mathfrak{F}$ получаем $NQ \in \mathfrak{F}$. По утверждению 1 теоремы 3 имеем, что q делит $p-1$. Поэтому $G/\mathrm{C}_G(N) \simeq M \in \mathfrak{S}_\pi \subseteq f(p)$. Значит, главный фактор N группы G является f-центральным. Тогда из $G/N \in \mathfrak{X}$ получаем, что $G \in \mathfrak{X}$. Это противоречит выбору G.

Пусть теперь G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G разрешима. Из выбора G и насыщенности формаций $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$ следует, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N, $G/N \in \mathfrak{F}$ и $\Phi(G) = 1$. Группа $G = NM$, где M — некоторая максимальная подгруппа G, причем $N \cap M = 1$, $N = \mathrm{C}_G(N) = \mathrm{F}(G)$. Из $G/N \in \mathfrak{X}$ получаем $M \simeq G/\mathrm{C}_G(N) \in f(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_\pi$, где $\pi = \{q \in \mathbb{P} \mid q$ делит $p-1\}$. По лемме 1 $G/\mathrm{C}_G(N) \in \mathfrak{S}_\pi$. Поэтому M — π-группа, причем $q < p$ для любого $q \in \pi(M)$. Тогда ясно, что N — силовская p-подгруппа группы G и G дисперсивна по Оре. Рассмотрим любую подгруппу Шмидта S группы G. По теореме 26.1 из [13] S — бипримарная группа. Если p не делит $|S|$, то из разрешимости G следует $S \leq M^x$ для некоторого $x \in G$. Ввиду $M^x \simeq M \in \mathfrak{F}$ получаем, что S сверхразрешима. Допустим теперь, что p делит $|S|$. Тогда S

p-замкнута. По утверждению 1 теоремы 3 подгруппа $S \in \mathfrak{F}$. Следовательно, S сверхразрешима. Это означает, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G. Итак, $\mathfrak{F} = LF(f)$ и f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$.

Ясно, что $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p, т. е. экран f полный. □

2. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\tau\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{F}$ является MP-замкнутой формацией и $p \in \tau \setminus \pi$, p делит $q-1$ для некоторого $q \in \pi \setminus \tau$. Тогда найдется группа Шмидта $G = AB$, где $|A| = q$, $|B| = p$ и $A \trianglelefteq G$. Заметим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$. С другой стороны, G является произведением взаимно перестановочных $\mathfrak{F}$-подгрупп A и B. Из MP-замкнутости $\mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для любого $p \in \tau \setminus \pi$ p не делит $q-1$ для любого $q \in \pi \setminus \tau$. Допустим, что $\mathfrak{F}$ не MP-замкнута. Выберем группу G минимального порядка такую, что $G = AB$ — произведение взаимно перестановочных $\mathfrak{F}$-подгрупп A и B, но $G \notin \mathfrak{F}$.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. По утверждению 1 леммы 5 $G/N = AN/N \cdot BN/N$ — произведение взаимно перестановочных подгрупп AN/N и BN/N. Из $AN/N \simeq A/A \cap N \in \mathfrak{F}$, $BN/N \simeq B/B \cap N \in \mathfrak{F}$ и выбора группы G получаем $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{S}_\tau$ и $\mathfrak{H}$ являются насыщенными формациями, $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Следовательно, N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. Если $O_p(G) \neq 1$ для некоторого $p \in \tau$, то $N \leq O_p(G)$. Тогда из $G/O_p(G) \in \mathfrak{F}$ вытекает $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Значит, $O_p(G) = 1$ для любого $p \in \tau$. Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть N — неабелева группа. Тогда $\mathrm{C}_G(N) = 1$. Согласно утверждению 2 леммы 4

$$\{N \cap A, N \cap B\} \subseteq \{N, 1\} \text{ и } N = (N \cap A)(N \cap B).$$

a) Предположим, что $N \cap A = N \cap B = N$. Тогда $N \leq A \cap B$. Допустим, что $A^{\mathfrak{H}} \neq 1$ и $A^{\mathfrak{H}} \cap N \neq 1$. Из $N = N_1 \times \cdots \times N_t$, где $N_1, \ldots, N_t$ — изоморфные простые неабелевы группы, и $A^{\mathfrak{H}} \cap N \trianglelefteq N$ заключаем, что $A^{\mathfrak{H}} \cap N = N_{i_1} \times \cdots \times N_{i_k}$, причем $\{i_1, \ldots, i_k\}$ — подмножество множества $\{1, \ldots, t\}$. Из $A^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{S}_\tau$ следует, что N_{i_j} является разрешимой τ-группой, $j \in \{1, \ldots, k\}$. Так как $N_1, \ldots, N_t$ изоморфны, N является разрешимой τ-группой. Получили противоречие. Значит, $A^{\mathfrak{H}} \cap N = 1$. В этом случае $1 \neq A^{\mathfrak{H}} \leq \mathrm{C}_G(N) = 1$. Снова получаем противоречие. Остается принять, что $A^{\mathfrak{H}} = 1$. Тогда $A \in \mathfrak{H}$. Аналогично доказывается, что $B \in \mathfrak{H}$. Из MP-замкнутости $\mathfrak{H}$ следует $G = AB \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}_\tau\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

b) Теперь предположим, что $N \cap A = N$ и $N \cap B = 1$. Так как N не является циклической группой, по утверждению 5 леммы 4 $N \leq \mathrm{C}_G(B)$. Отсюда и из $N \cap B = 1$ имеем $B \leq \mathrm{C}_G(N) = 1$. Следовательно, $B = 1$. Отсюда $G = A \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G.

c) Случай $N \cap B = N$ и $N \cap A = 1$ приводит к противоречию ввиду симметричности условий, наложенных на A и B.

d) Случай $N \cap A = N \cap B = 1$ невозможен, так как по утверждению 2 леммы 4

$$1 \neq N = (N \cap A)(N \cap B).$$

2. Пусть N — абелева группа. Тогда N — элементарная абелева q-группа для некоторого простого $q \in \pi \setminus \tau$, $N = \mathrm{C}_G(N) = \mathrm{F}(G)$. В G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM, N \cap M = 1$, причем $M \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 4 возможны следующие случаи.

a) Пусть $N \leq A \cap B$. Из $\{A, B\} \subseteq \mathfrak{F}$ имеем $A^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{S}_\tau$ и $B^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{S}_\tau$. Поэтому $A^{\mathfrak{H}} \leq \mathrm{C}_G(N) = N$ и $B^{\mathfrak{H}} \leq \mathrm{C}_G(N) = N$. Значит, $A^{\mathfrak{H}} = B^{\mathfrak{H}} = 1$ и $\{A, B\} \subseteq \mathfrak{H}$. Из MP-замкнутости $\mathfrak{H}$ следует, что $G = AB \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G.

b) Пусть $N \cap A = N$ и $N \cap B = 1$. Тогда из $\mathrm{C}_G(N) = N$ и утверждения 5 леммы 4 заключаем, что N — циклическая группа. Из $|N| = q$ и $M \simeq G/\mathrm{C}_G(N)$ имеем, что M изоморфна подгруппе циклической группы порядка $q-1$. Поэтому $\pi(M) \subseteq \pi$. Из насыщенности формации $\mathfrak{H}$ следует $N \in \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{H})} \subseteq \mathfrak{H}$ и $M \in \mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{H})} \subseteq \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{H}$ MP-замкнута, $G = NM \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G.

c) Случай $N \cap B = N$ и $N \cap A = 1$ приводит к противоречию ввиду симметричности условий, наложенных на A и B.

d) Случай $N \cap A = N \cap B = 1$ невозможен, так как по теореме 4.3.11 из [6] для ядра A_G подгруппы A и ядра B_G подгруппы B в G произведение $A_G B_G \neq 1$. Достаточность доказана. Теорема 1 доказана.

Следствия 1–5 вытекают из теоремы 1 при соответствующем выборе τ, π и $\mathfrak{H}$.

Доказательство теоремы 2. 1. Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$, где f — полный локальный экран такой, что $f(p)$ — MP-замкнутая формация для любого простого p. Предположим, что $\mathfrak{F}$ не является MP-замкнутой. Выберем группу G наименьшего порядка такую, что $G = AB$, где A и B — взаимно перестановочные $\mathfrak{F}$-подгруппы G, но G не принадлежит $\mathfrak{F}$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G. Из утверждения 1 леммы 5 $\{AN/N, BN/N\} \subseteq \mathfrak{F}$ и $|G/N| < |G|$ имеем $G/N \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, то N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. Рассмотрим два случая.

1) N — абелева p-группа, где p — некоторое простое число. В этом случае $N = \mathrm{C}_G(N) = \mathrm{F}_p(G) = \mathrm{F}(G)$ и $G = NM$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G, $M \cap N = 1$. По утверждению 4 леммы 4 $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$.

a) Пусть $N \cap A = N \cap B = N$. Тогда $N \leq A \cap B$. Используя тождество Дедекинда, получаем $A = A \cap NM = N(A \cap M)$ и $B = N(B \cap M)$. По утверждению 1 леммы 6 $(A \cap M)(B \cap M)$ является подгруппой в G. Из $NM = G = N(A \cap M) \cdot N(B \cap M) = N(A \cap M)(B \cap M)$ следует $M = (A \cap M)(B \cap M)$. По лемме 3 $A/\mathrm{F}_p(A) \in f(p)$. Из $N \leq \mathrm{F}_p(A)$ и $N = \mathrm{C}_G(N)$ имеем $O_{p'}(A) = 1$ и $\mathrm{F}_p(A)$ является p-группой. Учитывая, что $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$, получаем $A \cap M \simeq (A \cap M)N/N = A/N \in f(p)$. Аналогично доказывается, что $B \cap M \in f(p)$. Ввиду утверждения 1 леммы 6 подгруппы $A \cap M$ и $B \cap M$ являются взаимно перестановочными. Поэтому $M \in f(p)$ и $G/\mathrm{C}_G(N) \in f(p)$. Отсюда и из $G/N \in \mathfrak{F}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G.

b) Пусть $N \cap A = 1$. По утверждению 3 леммы 4 $[N, A \cap B] = 1$. Отсюда $A \cap B \leq \mathrm{C}_G(N) = N$. Поэтому $A \cap B \leq N \cap A = 1$. Значит, $A \cap B = 1$. Из утверждения 3 леммы 6 заключаем, что $G = AB$ является произведением тотально перестановочных подгрупп A и B. Из $A, B \in \mathfrak{F}$ следует $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Поэтому легко заметить, что приведенный во введении результат из [9] справедлив, если $\mathfrak{F}$ содержит все сверхразрешимые π-группы для $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G.

c) Случай $N \cap B = 1$ приводит к противоречию ввиду симметричности условий, наложенных на A и B.

2) Пусть N — неабелева группа. Тогда из единственности в G минимальной нормальной подгруппы N следует $\mathrm{C}_G(N) = 1$. Из утверждения 2 леммы 4 имеем $N = (N \cap A)(N \cap B)$ и $\{A \cap N, B \cap N\} \subseteq \{N, 1\}$.

a) Допустим, что $A \cap N = N$ и $B \cap N = N$. Это означает, что $N \leq A \cap B$. Из $A \in \mathfrak{F}$ получаем $A/\mathrm{C}_A(L/K) \in f(p)$, где L/K пробегает все главные факторы группы A, лежащие в N. Пусть D обозначает пересечение всех их централизаторов. Так как $f(p)$ — формация, то $A/D \in f(p)$. Так как N неабелева и $\mathrm{C}_G(N) = 1$, то $C_D(N) = 1$. Следовательно, D можно рассматривать как некоторую группу автоморфизмов группы N, действующую тождественно на всех A-главных факторах, лежащих в N. Из теоремы Холла ([13], теорема

9.8) имеем, что D нильпотентна. Из $D \trianglelefteq A$ вытекает $D \leq \mathrm{F}(A)$. Аналогично доказывается, что $D \leq \mathrm{F}(B)$. Из теоремы 1.1.7 [6] заключаем, что D — субнормальная подгруппа в G. Из нильпотентности D следует $D \leq \mathrm{F}(G) = 1$. Но тогда $A \in f(p)$. Аналогично доказывается, что $B \in f(p)$. Из MP-замкнутости формации $f(p)$ получаем $G \in f(p)$. Так как $\mathrm{C}_G(N) = 1$, главный фактор N группы G является f-центральным. Тогда из $G/N \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G.

b) Пусть теперь $A \cap N = N$ и $B \cap N = 1$. Так как N — нециклическая группа, то по утверждению 5 леммы 4 $N \leq \mathrm{C}_G(B)$. Отсюда $B \leq \mathrm{C}_G(N) = 1$. Тогда $G = A \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

c) Случай $B \cap N = N$ и $A \cap N = 1$ приводит к противоречию ввиду симметричности условий, наложенных на A и B.

Таким образом, формация $\mathfrak{F}$ является MP-замкнутой. Утверждение 1 доказано.

2. Пусть $\mathfrak{F} = LF(F)$, где F — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{F}$ является MP-замкнутой. Пусть p — любое простое число и группа $G = AB$, где A и B — взаимно перестановочные $F(p)$-подгруппы. Из $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $G \in F(p)$.

Рассмотрим регулярное сплетение $E = P \wr G = LG$, где $|P| = p$, L — база сплетения, являющаяся элементарной абелевой p-группой. Из $\mathfrak{N}_p F(p) = F(p) \subseteq \mathfrak{F}$ заключаем, что LA и LB являются $\mathfrak{F}$-подгруппами. Ясно, что LA/L и LB/L взаимно перестановочны. По утверждению 2 леммы 5 LA и LB являются взаимно перестановочными подгруппами. Так как $\mathfrak{F}$ MP-замкнута, то $E = LA \cdot LB \in \mathfrak{F}$. Если D — пересечение централизаторов в E всех E-главных факторов, лежащих в L, то $E/D = GL/D \simeq G/G \cap D \in F(p)$. Так как по свойству сплетения $\mathrm{C}_G(L) = 1$, то по лемме 3.10 из [13] подгруппа $G \cap D$ является p-группой. Но тогда $G \in \mathfrak{N}_p F(p) = F(p)$. Итак, $F(p)$ MP-замкнута.

Допустим теперь, что формация $F(p)$ является MP-замкнутой для любого простого p. Так как экран F является полным, по утверждению 1 теоремы формация $\mathfrak{F}$ является MP-замкнутой. Теорема 2 доказана.

Следствия 6 и 7 получаются из теоремы 2 ввиду предложений 1, 2 и следствия 4.

Литература

[1] Fitting H. *Beiträge zur Theorie der Gruppen endlichen Ordnung*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **48**, 77–141 (1938).

[2] Bryce R.A., Cossey J. *Fitting formations of finite soluble groups*, Math. Z. **127** (3), 217–233 (1972).

[3] Амберг Б., Казарин Л.С., Хефлинг Б. *Конечные группы с кратными факторизациями*, Фундамент. и прикл. матем. **4** (4), 1251–1263 (1998).

[4] Васильев А.Ф. *Об абнормально факторизуемых конечных разрешимых группах*, Укр. матем. журн. **54** (9), 1163–1171 (2002).

[5] Vasil'ev A.F. *On products of nonnormal subgroups of finite groups*, Acta Appl. Math. **85** (1), 305–311 (2005).

[6] Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M. *Products of finite groups* (Walter de Gruyter, Berlin–New York, 2010).

[7] Asaad M., Shaalan A. *On the supersolubility of finite groups*, Arch. Math. **53** (4), 318–326 (1989).

[8] Maier R. *A completeness property of certain formations*, Bull. London Math. Soc. **24**, 540–544 (1992).

[9] Ballester-Bolinches A., Pérez-Ramos M.D. *A question of R. Maier concerning formations*, J. Algebra **182**, 738–747 (1996).

[10] Gaschütz W. *Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen*, Math. Z. **80** (4), 300–305 (1963).

[11] Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups* (Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1992).

[12] Beidleman J.C., Heineken H. *Mutually permutable subgroups and group classes*, Arch. Math. (Basel) **85**, 18–30 (2005).

[13] Шеметков Л.А. *Формации конечных групп* (Наука, М., 1978).

[14] Монахов В.С. *О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта*, Матем. заметки **58** (5), 717–722 (1995).

А.Ф. Васильев

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, д. 104, г. Гомель, 246019, Республика Беларусь,

e-mail: formation56@mail.ru

Т.И. Васильева

Белорусский государственный университет транспорта,
ул. Кирова, д. 34, г. Гомель, 246653, Республика Беларусь,

e-mail: tivasilyeva@mail.ru

Д.Н. Симоненко

Белорусский государственный университет транспорта,
ул. Кирова, д. 34, г. Гомель, 246653, Республика Беларусь,

e-mail: dsimonenkon@mail.ru

A.F. Vasil'ev, T.I. Vasil'eva, and D.N. Simonenko

On MP-closed saturated formations of finite groups

Abstract. A class of groups $\mathfrak{F}$ is called MP-closed, if it contains every group $G = AB$ such that $\mathfrak{F}$-subgroup A permutes with every subgroup of B and $\mathfrak{F}$-subgroup B permutes with every subgroup of A. We prove that the formation $\mathfrak{F}$ containing the class of all supersoluble groups is MP-closed if and only if the formation $F(p)$ is MP-closed for all prime p, where F is maximal integrated local screen of $\mathfrak{F}$. In particular, we prove that the formation of all groups with supersoluble Schmidt subgroups is MP-closed.

Keywords: finite group, product of mutually permutable subgroups, saturated formation, MP-closed formation, local screen.

A.F. Vasil'ev

F. Scorina Gomel State University,
104 Sovetskaya str., Gomel, 246019 Republic of Belarus,

e-mail: formation56@mail.ru

T.I. Vasil'eva

Belarusian State University of Transport,
34 Kirova str., Gomel, 246653 Republic of Belarus,

e-mail: tivasilyeva@mail.ru

A.N. Simonenko

Belarusian State University of Transport,
34 Kirova str., Gomel, 246653 Republic of Belarus,

e-mail: dsimonenkon@mail.ru