Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 6

УДК 681.32.601.2:5 *КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

В. С. ЧУНАЕВ

ФУНКЦИИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

(Представлено академиком С. А. Лебедевым 11 V 1972)

В предлагаемой работе определяются так называемые функции переключения и рассматривается возможность их применения для описания поведения логических схем во времени при подаче на их входы сигналов, принимающих последовательно ряд значений, и при наличии задержек у элементов.

При необходимости оперировать с рядом значений двоичной переменной x, ее удобно представлять последовательностью принимаемых ею значений

$$x^1,\ x^2,\ x^3, \ldots, x^i,\ x^{i+1}, \ldots \ldots, x^m,\ x^{m+1}. \qquad (1)$$

На основании (1) образуем новую последовательность

$$x^1x^2,\ x^2x^3, \ldots, x^ix^{i+1}, \ldots \ldots, x^mx^{m+1}, \qquad (2)$$

которую будем рассматривать далее как последовательность, определяющую значения некоторой четверичной переменной

$$X = X^1,\ X^2, \ldots, X^i, \ldots \ldots, X^m$$

(например, если $x = 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0$, то $X = 00,\ 01,\ 11,\ 10$).

Таблица 1

Таблицы истинности для конъюнкции, дизъюнкции и инверсии четверичных переменных

Конъюнкция			Дизъюнкция			Инверсия	
x_1^i	x_2	x^i	x_1^i	x_2^i	x^i	x_1^i	x^i
11	11	11	11	11	11	11	00
00	00	00	00	00	00	00	11
11	00	00	11	00	11	01	10
11	10	10	11	10	11	10	01
11	01	01	11	01	11		
10	01	00	10	01	11		
00	01	00	00	01	01		
00	10	00	00	10	10		

Пусть последовательность значений x определяется последовательностью значений булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$. Поставим задачу найти некоторую функцию $F(X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_n)$, последовательность значений которой являлась бы последовательностью значений X. Искомую функцию (назовем ее **функцией переключения**) можно определить, пользуясь тем, что значения членов ее последовательности связаны со значениями булевой функции следующим образом:

$$\{F(X_1^i, X_2^i, \ldots, X_j^i, \ldots, X_n^i)\} = \\ = \{f(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_j^i, \ldots, x_n^i)\, f(x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, \ldots, x_j^{i+1}, \ldots, x_n^{i+1})\}. \qquad (3)$$

Определим функции переключения для элементарных булевых функций таблицами истинности (табл. 1), значения функций в которых подсчитываются по выражению (3); примем обозначения элементарных функций переключения аналогичными обозначениям элементарных булевых функций (например, функцию переключения для конъюнкции $x = x_1 \wedge x_2$ обозначим $X = X_1 \wedge X_2$, причем

$$\{X^i\} = \{X_1^i \wedge X_2^i\} = \{x_1^i \wedge x_2^i\ \ x_1^{i+1} \wedge x_2^{i+1}\}).$$

Тогда функцию переключения для произвольной булевой функции, выраженной через конъюнкции, дизъюнкции и инверсии, можно получить путем формальной замены обозначений аргументов с $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ на $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_n$ соответственно. Отметим, что законы преобразования функций переключения совпадают с законами преобразования булевых функций.

Используем далее функции переключения для описания поведения логических схем во времени при подаче на их входы двоичных сигналов, значения которых изменяются во времени.

Рассмотрим двоичный сигнал x (рис. 1*а*), принимающий одно из двух возможных значений в каждом интервале времени из некоторой последовательности интервалов $\{(T^{i-1}, T^i)\}$, ограниченных точками

$$\{T^i\} = T^1, T^2, \ldots, T^{i-1}, T^i, \ldots, T^m, \tag{4}$$

и используем для описания его значений на интервалах последовательность (1):

$$x = \begin{cases} \{(T^{i-1}, T^i)\} \\ \{x^i\} \end{cases}.$$

Поведение сигнала в точках (4) представим следующим образом: в точке T^i сигнал может как сохранять свое значение, которое он имел на i-интервале, так и одновременно принимать новое значение, которое он будет иметь на $i+1$-интервале.

На основании последовательности значений (1) переменной x, представляющей значения двоичного сигнала, можно составить последовательность четверичных значений (2) и использовать ее для описания четверичного сигнала X, определяя значение X^1 в точке T^1, X^2 — в точке T^2 и т. д.:

$$X = \begin{cases} \{T^i\} \\ \{X^i\} \end{cases},$$

или (иная форма записи)

$$X = \{X^i, T^i\}.$$

Значениям двоичного сигнала можно сопоставить четверичные значения не только в точках (4), но и в точках, принадлежащих интервалам (T^{i-1}, T^i). Отметим также, что, для того чтобы задать четверичный сигнал, достаточно указать его значения в тех точках T^i, в которых он принимает значения 01 и 10 (точки переключения).

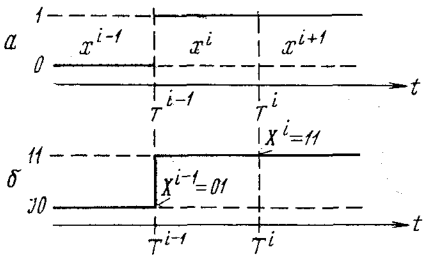

Рис. 1. Двоичный сигнал x (*а*) и четверичный сигнал X (*б*)

Рассмотрим некоторую логическую схему, имеющую n входов и 1 выход. Пусть на входы такой схемы подан набор двоичных сигналов $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$, так что набор значений $x_1^1, x_2^1, \ldots, x_j^1, \ldots, x_n^1$ подается на схему на интервале, ограниченном справа точкой T^1, набор значений $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_j^2, \ldots, x_n^2$ — на интервале (T^1, T^2) и т. д. Пусть выходная функция логической схемы $f(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ такова, что значение выходного сигнала схемы в любой момент времени (из интервалов (T^{i-1}, T^i)) определяется как значение булевой функции, аргументами которой являются двоичные значения набора входных сигналов, взятых в тот же момент времени (схема не содержит задержек):

$$x = \begin{cases} \{(T^{i-1}, T^i)\} \\ \{f(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_j^i, \ldots, x_n^i)\}. \end{cases}$$

Если двоичные значения выходного сигнала схемы связаны с двоичными значениями ее входных сигналов булевой функцией, то очевидно, что четверичные значения выходного сигнала X связаны с четверичными значениями входных сигналов $X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_n$ функцией переключения булевой функции, приписываемой схеме, т. е. выходная функция схемы будет

$$X = F(X_1, X_2, \ldots, X_j, X_n),$$

причем

$$\{X^i, T^i\} = \{F(X_1^i, X_2^i, \ldots, X_j^i, \ldots, X_n^i), (T^i)\}. \tag{5}$$

Если у сигналов, подаваемых на логическую схему, точки переключения не совпадают во времени, то, для того чтобы в этом случае с помощью функции переключения определить последовательность переключения выходного сигнала схемы, достаточно описать значения сигналов в их объединенных точках переключения

$$T = \{T^i\} = \{T_1^i\} \cup \{T_2^i\} \cup \ldots \cup \{T_j^i\} \cup \ldots \cup \{T_n^i\} \tag{6}$$

и по их значениям найти значения функции переключения (5) в этих точках. Переключения выходного сигнала схемы могут происходить только в точках последовательности (6), т. е. в точках переключения входных сигналов и только в них.

Рассмотрим преобразование: задержка (сдвиг) сигнала $X = \{X^i, T^i\}$

$$X^\tau = \{X^i, (T^i + \tau)\}.$$

Подобную операцию будем приписывать схеме «задержка», у которой X является входным сигналом, X^τ — выходным, τ — величина задержки (сдвига). Укажем, что

$$[X^{\tau_1}]^{\tau_2} = X^{\tau_1+\tau_2}, \tag{7}$$

$$[F(X_1, X_2, \ldots, X_j, \ldots, X_n)]^\tau = F(X_1^\tau, X_2^\tau, \ldots, X_j^\tau, \ldots, X_n^\tau). \tag{8}$$

Используя правила (7) и (8), функцию, представленную через дизъюнкции, конъюнкции и инверсии, аргументы и составляющие элементарные функции которой подвергнуты преобразованиям задержки, можно привести к дизъюнктивной нормальной форме (д.н.ф.) (в д.н.ф. операции задержки производятся непосредственно над аргументами): $\Phi(X_1^{\tau_1}, X_2^{\tau_2}, \ldots, X^{\tau_\xi}, \ldots, X_k^{\tau_k})$.

Для того, чтобы найти значения функции переключения, представленной подобным образом, достаточно описать значения аргументов функции в их объединенных точках переключения

$$T = \{T^i\} = \{T_1^i + \tau_1\} \cup \{T_2^i + \tau_2\} \cup \ldots \cup \{T_\xi^i + \tau_\xi\} \cup \ldots \cup \{T_k^i + \tau_k\}$$

и по их значениям найти значения функции в этих точках. Если

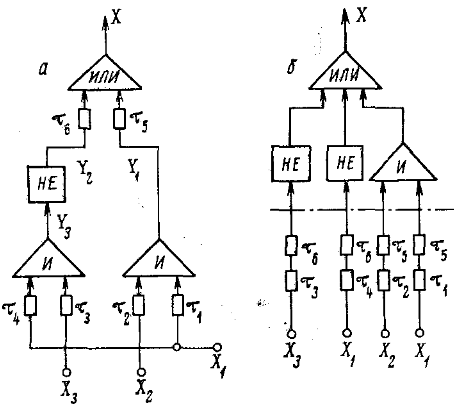

Рис. 2. Комбинационная схема (*а*) и ее эквивалентная схема (*б*)

функция $X = F(X_1^{\tau_1}, X_2^{\tau_2}, \ldots, X_j^{\tau_j}, \ldots, X_{n-1}^{\tau_{n-1}}, X^{\tau_n})$ описывает схему, выходной сигнал X которой является также одним из ее входных сигналов, то последовательность объединенных точек переключения функции включает как точки переключения внешних входных сигналов, сдвинутые на соответствующие величины сдвига, так и точки переключения выходного сигнала, сдвигаемые каждый раз на величину τ_n.

Возможность аналитического описания поведения логических схем во времени с помощью функций переключений можно эффективно использовать для анализа комбинационных схем следующим образом. Будем интересоваться значениями сигнала, возникающего в некоторой точке комбинационной схемы, состоящей из элементов, обладающих задержками. Для этого составим (двигаясь от исследуемой точки к входам схемы) функцию переключения анализируемой части схемы и приведем ее к д.н.ф. Так, для схемы на рис. 2*а* (опуская промежуточные преобразования) можно получить

$$X = X_1^{\tau_1+\tau_5} \wedge X_2^{\tau_2+\tau_5} \vee [\overline{X_1^{\tau_4+\tau_6}}] \vee [\overline{X_3^{\tau_3+\tau_6}}] \tag{9}$$

и найти затем значения выходного сигнала по заданным во времени значениям входных сигналов. Сравнивая значения входных и выходных сигналов, можно судить, в частности, о длительности «переходного логического процесса», возникающего в схеме вследствие состязания сигналов в ее цепях.

Рассматривая (9), заметим, что произвольной комбинационной схеме можно поставить в соответствие некоторую эквивалентную схему (пример на рис. 2*б*), в которой задержки элементов выделены в цепочки, соответствующие цепям анализируемой схемы, по которым сигналы от ее входов двигаются к ее выходу; задержки цепочек соответствуют длительностям прохождения сигналов по цепям схемы. Указанная процедура выделения в комбинационных схемах цепей движения сигналов оказывается полезной для анализа критических путей в схемах, проводимого при поиске оптимальной частоты смены комбинации сигналов в устройствах дискретных автоматов. Отметим также, что по функции переключения схемы, представленной в д.н.ф., можно определить тестовые последовательности входных сигналов, необходимые для проверки задержек цепи схем.

Институт точной механики и вычислительной техники
Академии наук СССР
Москва

Поступило
17 II 1972