



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, О К-
 $\mathbb{P}$ -субнормальных подгруппах конечных групп,
Матем. заметки, 2014, том 95, выпуск 4, 517–528

<https://www.mathnet.ru/mzm10216>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 37.17.74.99

3 октября 2025 г., 10:05:15





О K - $\mathbb{P}$ -субнормальных подгруппах конечных групп

А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов

Подгруппа H группы G называется K - $\mathbb{P}$ -субнормальной в G , если H можно соединить с группой цепью подгрупп, каждая из которых в следующей либо нормальна, либо имеет простой индекс. Получены свойства K - $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп. Исследован класс конечных групп, у которых силовские p -подгруппы являются K - $\mathbb{P}$ -субнормальными в G для каждого p из заданного множества простых чисел. Изучены некоторые произведения K - $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10216

1. Постановка задачи. Рассматриваются только конечные группы. В настоящее время широкое распространение получили различные обобщения понятия субнормальной подгруппы, одним из которых является понятие $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппы [1], [2]. В 1978 г. Кегелем [3] было предложено определение $\mathfrak{F}$ -достижимой или согласно [2] K - $\mathfrak{F}$ -субнормальной подгруппы. Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется K - $\mathfrak{F}$ -субнормальной в G [2], если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G$$

такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i , либо $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для любого $i = 1, \dots, n$.

Используя идею Кегеля, введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подгруппу H группы G будем называть K - $\mathbb{P}$ -субнормальной в G , если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G \quad (1.1)$$

такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i , либо $|H_i : H_{i-1}|$ есть простое число для любого $i = 1, \dots, n$. Будем обозначать H K - $\mathbb{P}$ -sn G .

Если $H = G$ или в цепи (1.1) индекс $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$, то H называется $\mathbb{P}$ -субнормальной в G [4]. В работах [4]–[7] были рассмотрены свойства $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп и их приложения.

Понятие $K\text{-}\mathbb{P}$ -субнормальной подгруппы шире, чем понятие $\mathbb{P}$ -субнормальной подгруппы. Например, пусть группа $G = G_1 \times G_2$, где G_i изоморфна любой простой неабелевой группе, которая не принадлежит списку простых неабелевых групп, обладающих цепью подгрупп с простыми индексами, приведенному в теореме 6 Казарина [8]. Ясно, что G_i – $K\text{-}\mathbb{P}$ -субнормальная, но не $\mathbb{P}$ -субнормальная подгруппа в G , $i = 1, 2$.

Обозначим через $\mathfrak{U}$ формацию всех сверхразрешимых групп. Используя замечание 2 из [1; с. 93], легко показать, что каждая $K\text{-}\mathfrak{U}$ -субнормальная в G подгруппа является $K\text{-}\mathbb{P}$ -субнормальной в G . В общем случае обратное утверждение не выполняется. Например, в знакопеременной группе A_5 степени 5 силовская 2-подгруппа $K\text{-}\mathbb{P}$ -субнормальна, но не $K\text{-}\mathfrak{U}$ -субнормальна в A_5 .

Пусть π – некоторое множество простых чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группу G назовем $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимой, если для любого $p \in \pi$ силовская p -подгруппа группы G является $K\text{-}\mathbb{P}$ -субнормальной в G .

По определению единичная группа и всякая π' -группа являются $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимыми.

Обозначим через $\bar{w}_\pi\mathfrak{U}$ класс всех $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимых групп.

Для случая, когда $\pi = \mathbb{P}$ – множество всех простых чисел, будем называть $\bar{w}_\mathbb{P}$ -сверхразрешимую группу $\bar{w}$ -сверхразрешимой и вместо $\bar{w}_\mathbb{P}\mathfrak{U}$ использовать обозначение $\bar{w}\mathfrak{U}$.

В работе получены свойства $K\text{-}\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп, а также свойства групп из класса $\bar{w}_\pi\mathfrak{U}$.

2. Предварительные результаты. Используются определения и обозначения из [1], [9]. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

Через $\pi(G)$ обозначается множество всех различных простых делителей порядка группы G ; $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел; $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p -подгруппа группы G для некоторого $p \in \pi(G)$; $\text{Core}_G(M)$ – ядро подгруппы M в G , т.е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в G ; $F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G ; $\text{Syl}_p(G)$ – множество всех силовских p -подгрупп группы G ; $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп.

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ (p_i – простое число, $i = 1, \dots, n$) называется *дисперсивной по Оре* [1; с. 251], если $p_1 > p_2 > \cdots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия:

- 1) каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;
- 2) из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

По определению пустой класс групп является формацией.

Формация $\mathfrak{F}$ называется

- 1) *нормально наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит и все ее нормальные подгруппы;
- 2) *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит и все ее подгруппы;
- 3) *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$ -субнормальной в G [1], [2], если либо $H = G$, либо существует цепь максимальных подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что

$$H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1} \quad \text{для любого } i = 1, \dots, n.$$

Здесь $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$ -корадикал группы G , т.е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Отметим следующие свойства К- $\mathfrak{F}$ -субнормальных подгрупп.

ЛЕММА 2.1 [2; лемма 6.1.7]. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H – подгруппа из G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то H К- $\mathfrak{F}$ -субнормальна в G ;
- 2) если H – К- $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа в G , K – подгруппа из G , то $(H \cap K)$ – К- $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа в K ;
- 3) если H_1 и H_2 – К- $\mathfrak{F}$ -субнормальные подгруппы в G , то $(H_1 \cap H_2)$ – К- $\mathfrak{F}$ -субнормальная подгруппа в G .

ТЕОРЕМА 2.2 [10]. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда G можно представить в виде произведения двух нильпотентных $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп.

3. Свойства К- $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп. В данном пункте устанавливается ряд свойств К- $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп, аналогичных свойствам субнормальных подгрупп.

ЛЕММА 3.1. Пусть H – подгруппа группы G , $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если R – подгруппа из G и H К- $\mathbb{P}$ -sn R , то HN/N К- $\mathbb{P}$ -sn RN/N и $(H \cap N)$ К- $\mathbb{P}$ -sn $(R \cap N)$; в частности, $(H \cap N)$ К- $\mathbb{P}$ -sn R ;
- 2) если H К- $\mathbb{P}$ -sn G , то HN/N К- $\mathbb{P}$ -sn G/N и $(H \cap N)$ К- $\mathbb{P}$ -sn N ; в частности, $(H \cap N)$ К- $\mathbb{P}$ -sn G ;
- 3) если $N \subseteq H$ и H/N К- $\mathbb{P}$ -sn G/N , то H К- $\mathbb{P}$ -sn G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим справедливость 1). В R найдется цепь подгрупп $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = R$ такая, что либо H_{i-1} нормальна в H_i , либо $|H_i : H_{i-1}|$ есть простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

Если $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$, то $H_{i-1}N/N \trianglelefteq H_iN/N$ и $H_{i-1} \cap N \trianglelefteq H_i \cap N$. Если $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число, то из $H_{i-1} \subseteq (H_i \cap N)H_{i-1} \subseteq H_i$ следует, что

$$|H_iN/N : H_{i-1}N/N| = \frac{|H_i : H_{i-1}|}{|(H_i \cap N)H_{i-1} : H_{i-1}|}$$

равно либо $|H_i : H_{i-1}|$, либо 1 и $|H_i \cap N : H_{i-1} \cap N| = |(H_i \cap N)H_{i-1} : H_{i-1}|$ равно либо $|H_i : H_{i-1}|$, либо 1. Таким образом, из существования цепей

$$\begin{aligned} HN/N &= H_0N/N \subseteq H_1N/N \subseteq \dots \subseteq H_{n-1}N/N \subseteq H_nN/N = RN/N, \\ H \cap N &= H_0 \cap N \subseteq H_1 \cap N \subseteq \dots \subseteq H_{n-1} \cap N \subseteq H_n \cap N = R \cap N \end{aligned}$$

следует, что HN/N К- $\mathbb{P}$ -sn RN/N и $(H \cap N)$ К- $\mathbb{P}$ -sn $(R \cap N)$. Кроме того, ввиду $R \cap N \trianglelefteq R$ заключаем, что $(H \cap N)$ К- $\mathbb{P}$ -sn R .

Утверждение 2) следует из 1) при $R = G$.

Утверждение 3) следует из того, что если существует цепь подгрупп

$$H/N = H_0/N \subseteq H_1/N \subseteq \cdots \subseteq H_{m-1}/N \subseteq H_m/N = G/N$$

такая, что либо H_{i-1}/N нормальна в H_i/N , либо $|H_i/N : H_{i-1}/N|$ есть простое число, то $H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_{m-1} \subseteq H_m = G$ является цепью подгрупп, у которой либо H_{i-1} нормальна в H_i , либо $|H_i : H_{i-1}| = |H_i/N : H_{i-1}/N|$ – простое число для $i = 1, \dots, m$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть H – подгруппа группы G . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если HN_i К- $\mathbb{P}$ -sn G , $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, то $(HN_1 \cap HN_2)$ К- $\mathbb{P}$ -sn G ;
- 2) если H К- $\mathbb{P}$ -sn R и R К- $\mathbb{P}$ -sn G , то H К- $\mathbb{P}$ -sn G ;
- 3) если H К- $\mathbb{P}$ -sn G , то H^x К- $\mathbb{P}$ -sn G для любого $x \in G$;
- 4) если $G^\mathfrak{U} \subseteq H$, то H К- $\mathbb{P}$ -sn G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим справедливость 1). Пусть HN_i К- $\mathbb{P}$ -sn G , $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$. Тогда в G найдется цепь подгрупп

$$HN_1 = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_{t-1} \subseteq K_t = G$$

такая, что либо K_{i-1} нормальна в K_i , либо $|K_i : K_{i-1}|$ есть простое число для любого $i = 1, \dots, t$. Если $K_{i-1} \cap HN_2 = K_i \cap HN_2$ для любого $i = 1, \dots, t$, то $HN_1 \cap HN_2 = HN_2$ К- $\mathbb{P}$ -sn G . Пусть найдется $j \in \{1, \dots, t\}$ такое, что

$$K_{j-1} \cap HN_2 \neq K_j \cap HN_2.$$

Если $K_{j-1} \trianglelefteq K_j$, то $K_{j-1} \cap HN_2 \trianglelefteq K_j \cap HN_2$. Предположим, что $|K_j : K_{j-1}|$ – простое число. Так как $K_{j-1} \subseteq (K_j \cap HN_2)K_{j-1} \subseteq K_j$, а также $(K_j \cap HN_2)K_{j-1} = (K_j \cap N_2)K_{j-1}$ – подгруппа в K_j , то $(K_j \cap HN_2)K_{j-1} = K_j$. Поэтому

$$|K_j \cap HN_2 : K_{j-1} \cap HN_2| = |(K_j \cap HN_2)K_{j-1} : K_{j-1}|$$

– простое число. Таким образом, рассматривая цепь подгрупп

$$HN_1 \cap HN_2 = K_0 \cap HN_2 \subseteq K_1 \cap HN_2 \subseteq \cdots \subseteq K_{t-1} \cap HN_2 \subseteq K_t \cap HN_2 = HN_2$$

и учитывая К- $\mathbb{P}$ -субнормальность HN_2 в G , получаем, что $(HN_1 \cap HN_2)$ К- $\mathbb{P}$ -sn G .

Утверждения 2) и 3) следуют из определения К- $\mathbb{P}$ -субнормальной подгруппы.

Утверждение 4) справедливо ввиду 3) леммы 3.1 и того, что $H/G^\mathfrak{U}$ – подгруппа сверхразрешимой группы $G/G^\mathfrak{U}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. Пусть силовская p -подгруппа группы G является К- $\mathbb{P}$ -субнормальной подгруппой в G , $N \trianglelefteq G$. Тогда силовская p -подгруппа группы N и силовская p -подгруппа группы G/N являются К- $\mathbb{P}$ -субнормальными подгруппами в N и G/N соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из (а) теоремы 6.4 [9; гл. А] и 2) леммы 3.1.

Как было отмечено выше, всякая К- $\mathfrak{U}$ -субнормальная в группе G подгруппа является К- $\mathbb{P}$ -субнормальной в G . В общем случае обратное не выполняется. Однако для разрешимой группы справедлива

ЛЕММА 3.4. Пусть G – разрешимая группа, H – ее подгруппа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) H – $\mathcal{U}$ -субнормальная подгруппа в G ;
- 2) H – $\mathbb{P}$ -субнормальная подгруппа в G ;
- 3) H – $K\text{-}\mathbb{P}$ -субнормальная подгруппа в G ;
- 4) H – $K\text{-}\mathcal{U}$ -субнормальная подгруппа в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть H – $\mathcal{U}$ -субнормальная подгруппа в G . Для $H \neq G$ существует цепь максимальных подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$ такая, что $H_i^{\mathcal{U}} \subseteq H_{i-1}$ для любого $i = 1, \dots, n$. Из сверхразрешимости $H_i/H_i^{\mathcal{U}}$ и максимальности $H_{i-1}/H_i^{\mathcal{U}}$ в $H_i/H_i^{\mathcal{U}}$ следует, что $|H_i/H_i^{\mathcal{U}} : H_{i-1}/H_i^{\mathcal{U}}| = |H_i / : H_{i-1}|$ – простое число. Значит, H – $\mathbb{P}$ -субнормальная подгруппа в G , и из 1) следует 2).

2) $\Rightarrow$ 3) следует из определений $\mathbb{P}$ -субнормальной и $K\text{-}\mathbb{P}$ -субнормальной подгрупп в G .

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что G имеет $K\text{-}\mathbb{P}$ -субнормальную подгруппу H , которая не является $K\text{-}\mathcal{U}$ -субнормальной в G . Тогда в G найдется цепь подгрупп (1.1). Можно считать, что $H_{n-1} \neq G$. Ввиду разрешимости H_{n-1} и выбора G заключаем, что H $K\text{-}\mathcal{U}$ -субнормальна в H_{n-1} .

Если H_{n-1} нормальна в G , то найдется цепь субнормальных подгрупп

$$H_{n-1} = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_{m-1} \subset K_m = G$$

такая, что $|K_j : K_{j-1}|$ – простое число, $j = 1, \dots, m$. Поэтому $K_j^{\mathcal{U}} \subseteq K_{j-1}$ и H – $K\text{-}\mathcal{U}$ -субнормальная подгруппа в G . Это противоречит выбору G .

Значит, $|G : H_{n-1}| = p$ – простое число. Обозначим $M = H_{n-1}$ и $L = \text{Core}_G(M)$. Если $L \neq 1$, то M/L $K\text{-}\mathcal{U}\text{-sn } G/L$. Тогда $(G/L)^{\mathcal{U}} = G^{\mathcal{U}}L/L \subseteq M/L$. Поэтому M – $K\text{-}\mathcal{U}$ -субнормальная подгруппа в G , а следовательно, и H – $K\text{-}\mathcal{U}$ -субнормальная подгруппа в G . Получили противоречие с выбором G . Таким образом, $L = 1$. Из выбора G следует, что $|G| \neq p$. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда

$$G = NM, \quad N \cap M = 1, \quad N = C_G(N).$$

Из $|N| = |G : M| = p$ по теореме 1.4 из [11; гл. I] следует, что G – сверхразрешимая группа. Поэтому H – $K\text{-}\mathcal{U}$ -субнормальная подгруппа в G , что противоречит выбору G . Итак, из 3) следует 4).

4) $\Rightarrow$ 1) следует из того, что при $H \subseteq T \triangleleft R \subseteq G$ от T до R можно провести цепь субнормальных подгрупп с простыми индексами. Лемма доказана.

Пересечение двух $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп группы G в общем случае не является $K\text{-}\mathbb{P}$ -субнормальной подгруппой в G [7]. Для разрешимой группы выполняется

ЛЕММА 3.5. Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если H $K\text{-}\mathbb{P}\text{-sn } G$, R – подгруппа из G , то $(H \cap R)$ $K\text{-}\mathbb{P}\text{-sn } R$;
- 2) если H_i $K\text{-}\mathbb{P}\text{-sn } G$, $i = 1, 2$, то $(H_1 \cap H_2)$ $K\text{-}\mathbb{P}\text{-sn } G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 2) следуют из лемм 3.4 и 2.1.

ЛЕММА 3.6. Если в группе G всякая силовская подгруппа является $K\text{-}\mathbb{P}$ -субнормальной в G , то G дисперсивна по Оре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой лемма не выполняется. Для $H \in \text{Syl}_p(G)$, где p – наибольший простой делитель $|G|$, найдется цепь подгрупп (1.1). Тогда либо H нормальна в H_1 , либо $|H_1 : H|$ есть простое число. Заметим, что если $|H_1 : H| = p_1$, то из $p_1 = |H_1 : N_{H_1}(H)| \equiv 1 \pmod{p}$ и $p_1 < p$ следует, что H нормальна в H_1 .

Если $H_1 \leq H_2$, то из $H \leq H_1$ и $H \in \text{Syl}_p(H_1)$ заключаем, что H нормальна в H_2 . Для случая $|H_2 : H_1| = p_2$ из $p_2 = |H_2 : N_{H_2}(H)| \equiv 1 \pmod{p}$ и $p_2 < p$ получаем также, что $H \leq H_2$. Аналогично показывается, что H нормальна в $H_n = G$.

Если R/H – любая силовская q -подгруппа из G/H , то $R/H = QH/H$ для некоторой $Q \in \text{Syl}_q(G)$. По 2) леммы 3.1 R/H $K\text{-}\mathbb{P}\text{-sn } G/H$. По выбору G получаем, что G/H дисперсивна по Оре, а значит, и G дисперсивна по Оре. Это противоречит выбору G . Лемма доказана.

4. Формация $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимых групп. Приведем некоторые свойства класса $\bar{w}_\pi\mathfrak{U}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если G $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешима и $N \leq G$, то N и G/N $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимы;
- 2) если G/N_1 и G/N_2 $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимы для любых $N_i \leq G$, $i = 1, 2$, то группа $G/N_1 \cap N_2$ также $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешима;
- 3) прямое произведение $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимых групп является $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимой группой;
- 4) класс $\bar{w}_\pi\mathfrak{U}$ является нормально наследственной формацией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) вытекает из определения $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимой группы и леммы 3.3.

Докажем 2). Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что в G существуют нормальные подгруппы N_1 и N_2 , для которых G/N_1 и G/N_2 $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимы, а $G/N_1 \cap N_2$ не является $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимой.

Если $K = N_1 \cap N_2 \neq 1$, то $G/K/N_i/K \simeq G/N_i$ $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешима для $i = 1, 2$. Из $|G/K| < |G|$ получаем, что

$$G/K/(N_1/K \cap N_2/K) \simeq G/N_1 \cap N_2$$

$\bar{w}_\pi$ -сверхразрешима. Это противоречит выбору G .

Значит, $N_1 \cap N_2 = 1$. Возьмем $p \in \pi$ и рассмотрим силовскую p -подгруппу P группы G . Так как PN_i/N_i – силовская p -подгруппа в G/N_i и G/N_i $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешима, то PN_i/N_i $K\text{-}\mathbb{P}\text{-sn } G/N_i$, $i = 1, 2$. Тогда PN_i $K\text{-}\mathbb{P}\text{-sn } G$, $i = 1, 2$ по 3) леммы 3.1. Ввиду (b) теоремы 6.4 из [9; гл. А] и 1) леммы 3.2 подгруппа

$$PN_1 \cap PN_2 = P(N_1 \cap N_2) = P$$

$K\text{-}\mathbb{P}$ -субнормальна в G . Следовательно, $G/N_1 \cap N_2$ $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешима. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 2).

Утверждение 3) непосредственно следует из 2).

Утверждение 4) следует из 1) и 2). Теорема доказана.

ЛЕММА 4.2. Пусть G – разрешимая группа. Если $G \in \bar{w}_\pi\mathfrak{U}$ и R – подгруппа из G , то $R \in \bar{w}_\pi\mathfrak{U}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – подгруппа $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимой группы G . Если $p \in \pi \cap \pi(R)$, то по теореме Силова силовская p -подгруппа T из R содержится в некоторой силовской p -подгруппе P группы G . Так как G разрешима, то из P К- $\mathbb{P}$ -sn G по утверждению 1) леммы 3.5 следует К- $\mathbb{P}$ -субнормальность $R \cap P = T$ в R и $R \in \bar{w}_\pi \mathfrak{U}$. Если R – π' -группа, то $R \in \bar{w}_\pi \mathfrak{U}$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.3. *Класс групп $\bar{w}_\pi \mathfrak{U} \cap \mathfrak{S}$ является наследственной насыщенной формацией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\mathfrak{F} = \bar{w}_\pi \mathfrak{U} \cap \mathfrak{S}$. Ввиду леммы 4.2 и 4) теоремы 4.1 класс $\mathfrak{F}$ является наследственной формацией.

Докажем насыщенность $\mathfrak{F}$. Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ и $G \notin \mathfrak{F}$. Так как $G/\Phi(G)$ разрешима, то G разрешима. Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G . Тогда имеем $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$ и $G/\Phi(G)N \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $(G/N)/\Phi(G/N) \in \mathfrak{F}$. Ввиду $|G/N| < |G|$ получаем, что $G/N \in \mathfrak{F}$.

Класс $\mathfrak{F}$ является формацией, поэтому N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Значит, $N \subseteq \Phi(G)$. Так как N – p -группа для некоторого простого числа p , то $\Phi(G)$ и $F(G)$ являются p -группами. Из разрешимости G следует, что $\Phi(G) \neq F(G)$. Пусть Q – силовская q -подгруппа группы G для $q \in \pi$. Так как $\Phi(G)$ не содержит силовских подгрупп группы G , то $q \in \pi \cap \pi(G/N)$. Ввиду того, что $G/N \in \bar{w}_\pi \mathfrak{U}$, подгруппа QN/N К- $\mathbb{P}$ -sn G/N .

Если $q = p$, то из $QN/N = Q/N$ и 2) леммы 3.1 следует, что Q К- $\mathbb{P}$ -sn G .

Пусть $q \neq p$. Обозначим $H/N = QN/N \cdot F(G)/N$. Из 1) леммы 3.5 следует, что QN/N К- $\mathbb{P}$ -sn H/N . Так как $F(G)/N \trianglelefteq H/N$ и H/N разрешима, подгруппа $F(G)/N$ $\mathbb{P}$ -sn H/N . По теореме 2.2 H/N – сверхразрешимая группа. Формация $\mathfrak{U}$ имеет локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{A}(p-1)$, где $\mathfrak{A}(p-1)$ – формация всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$. Так как $O_{p'}(G) = 1$, по теореме 9.18 из [1] H действует f -стабильно на $\Phi(G)$. Отсюда следует, что H – сверхразрешимая группа. Поэтому QN сверхразрешима. Тогда Q К- $\mathbb{P}$ -sn QN К- $\mathbb{P}$ -sn G . Значит, Q К- $\mathbb{P}$ -sn G . Получили противоречие с выбором G . Теорема доказана.

Ввиду леммы 3.6 получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.3.1. *Класс $\bar{w}_\pi \mathfrak{U}$ является наследственной насыщенной формацией.*

Пусть r – простое число. В оставшейся части п. 4 будем рассматривать множество $\pi = \mathbb{P} \setminus \{r\}$ и для него установим некоторые свойства $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимых групп.

ЛЕММА 4.4. *Любая $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимая группа разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – минимальный контрпример к лемме. Предположим, что группа G не простая и $N \triangleleft G$. Из 1) теоремы 4.1 следует, что N и G/N $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимы. Так как G – минимальный контрпример, то N и G/N разрешимы. Отсюда следует, что G является разрешимой группой. Это противоречит выбору G .

Следовательно, G – простая неабелева группа. По лемме 2.1 из [4] группа G не может содержать двух подгрупп различных простых индексов. Для всякого $t \in \pi$ силовская t -подгруппа группы G К- $\mathbb{P}$ -субнормальна в G . Поскольку G является простой неабелевой группой, силовская t -подгруппа содержится в максимальной

подгруппе группы G простого индекса. Следовательно, для всех $t \in \pi$ силовские t -подгруппы содержатся в максимальных подгруппах, индекс которых в G есть простое число r . Очевидно, что G изоморфно вкладывается в симметрическую группу S_r , обладает холловой r' -подгруппой и силовская r -подгруппа группы G не является К- $\mathbb{P}$ -субнормальной в G . Из теоремы 7 [12] следует, что

$$G \in \left\{ A_r, r \geq 5, \text{PSL}_n(q), \frac{q^n - 1}{q - 1} = r, \text{PSL}_2(11), r = 11, M_{11}, r = 11, M_{23}, r = 23 \right\}.$$

Все холловы r' -подгруппы простых неабелевых групп из приведенного списка изоморфны. Следовательно, по лемме 3.6 холловы r' -подгруппы группы G дисперсивны по Оре.

Покажем, что группы из списка теоремы 7 [12] этим свойством не обладают. Пусть H – холлова r' -подгруппа группы G . Для

$$G \in \{A_r, r \geq 5, \text{PSL}_2(11), r = 11, M_{11}, r = 11, M_{23}, r = 23\}$$

подгруппа H изоморфна соответственно A_{r-1} , A_5 , A_6^2 , M_{22} . Данные группы не дисперсивны по Оре. Пусть

$$G \cong \text{PSL}_n(q), \quad \text{где} \quad \frac{q^n - 1}{q - 1} = r.$$

При $n = 2$ группа $G \cong \text{PSL}_2(q)$ и $q + 1 = r$. Следовательно, $q = 2^m$, $G \cong \text{PSL}_2(2^m)$ и H – подгруппа Бореля, являющаяся группой Фробениуса с ядром порядка 2^m . Поэтому H не дисперсивна по Оре. При $n \geq 3$ подгруппа H является параболической максимальной подгруппой группы G , которая получается отбрасыванием одной из крайних вершин диаграммы Дынкина неприводимой системы корней A_{n-1} . Если $G \notin \{\text{PSL}_3(2), \text{PSL}_3(3)\}$, то H – неразрешимая группа и не является дисперсивной по Оре. Если $G \in \{\text{PSL}_3(2), \text{PSL}_3(3)\}$, то H изоморфна соответственно S_4 или $3^2 : 2S_4$. Эти группы не дисперсивны по Оре. Таким образом, холловы r' -подгруппы группы G не дисперсивны по Оре. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Заметим, что знакопеременная группа A_5 является $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимой для $\pi = \mathbb{P} \setminus \{3, 5\}$. Таким образом, если множество π получено отбрасыванием из $\mathbb{P}$ более одного простого числа, то $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимая группа не всегда разрешима.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть G – $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимая группа. Тогда

- 1) G обладает холловой r' -подгруппой, дисперсивной по Оре;
- 2) G обладает нормальной холловой τ -подгруппой, дисперсивной по Оре, где $\tau = \{t \in \pi(G) \mid t > r\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По лемме 4.4 группа G разрешима, поэтому имеет холлову r' -подгруппу H . По теореме 4.3 класс групп $\bar{w}_\pi \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$ является наследственной насыщенной формацией, поэтому по лемме 3.6 подгруппа H дисперсивна по Оре.

2) Если $\tau = \emptyset$, то свойство 2) доказано. Поэтому $\tau \neq \emptyset$. Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы G . Подгруппа $P \in \text{Syl}_p(G)$ является К- $\mathbb{P}$ -субнормальной в G . Дословно повторяя доказательство леммы 3.6, получим, что $P \triangleleft G$. Для завершения доказательства достаточно рассмотреть фактор-группу $\bar{G} = G/P$ и применить приведенные выше рассуждения. Теорема доказана.

5. Произведения К- $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп. Рассмотрим приложения К- $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп к факторизациям групп.

ЛЕММА 5.1. Пусть группа $G = AB$ – произведение подгрупп A, B и A К- $\mathbb{P}$ -sn G , B К- $\mathbb{P}$ -sn G . Пусть

$$\begin{aligned} A &= A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n = G, \\ B &= B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_{m-1} \subseteq B_m = G \end{aligned}$$

– цепи подгрупп такие, что либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$, либо $|A_i : A_{i-1}|$ есть простое число для всех $i = 1, \dots, n$ и либо $B_{j-1} \trianglelefteq B_j$, либо $|B_j : B_{j-1}|$ есть простое число для всех $j = 1, \dots, m$. Тогда

$$(A_{i-1} \cap B) \text{ К-}\mathbb{P} \text{-sn } A_{i-1} \quad \text{и} \quad (B_{j-1} \cap A) \text{ К-}\mathbb{P} \text{-sn } B_{j-1}$$

для всех $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отбрасывая повторения, без ограничения общности, можно считать, что

$$A_{i-1} \cap B = A_{i-1} \cap B_0 \subset A_{i-1} \cap B_1 \subset \cdots \subset A_{i-1} \cap B_{m-1} \subset A_{i-1} \cap B_m = A_{i-1}.$$

Если $B_{k-1} \triangleleft B_k$ для некоторого $k \in \{1, \dots, m\}$, то

$$A_{i-1} \cap B_{k-1} \triangleleft A_{i-1} \cap B_k.$$

Действительно, пусть $x \in A_{i-1} \cap B_k$. Тогда $(A_{i-1} \cap B_{k-1})^x = A_{i-1}^x \cap B_{k-1}^x$. Так как $x \in A_{i-1}$, то $A_{i-1}^x = A_{i-1}$, и так как $x \in B_k$, где $B_{k-1} \triangleleft B_k$, то $B_{k-1}^x = B_{k-1}$. Поэтому $A_{i-1} \cap B_{k-1} \triangleleft A_{i-1} \cap B_k$.

Если $|B_k : B_{k-1}|$ – простое число, то

$$|A_{i-1} \cap B_k : A_{i-1} \cap B_{k-1}| = |(A_{i-1} \cap B_k)B_{k-1} : B_{k-1}| = |B_k : B_{k-1}|$$

– простое число. Следовательно, $(A_{i-1} \cap B)$ К- $\mathbb{P}$ -sn A_{i-1} . Аналогично показывается, что $(B_{j-1} \cap A)$ К- $\mathbb{P}$ -sn B_{j-1} . Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть группа $G = AB$ – произведение разрешимых подгрупп A и B . Если A и B К- $\mathbb{P}$ -субнормальны в G , то G разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – группа наименьшего порядка такая, что $G = AB$, A и B – разрешимые подгруппы, A и B К- $\mathbb{P}$ -субнормальны в G , а G не является разрешимой. В G имеются цепи подгрупп

$$A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n = G \quad \text{и} \quad B = B_0 \subseteq B_1 \subseteq \cdots \subseteq B_{m-1} \subseteq B_m = G$$

такие, что

- либо $|A_i : A_{i-1}|$ – простое число,
- либо $A_{i-1} \trianglelefteq A_i$ для всех $i = 1, \dots, n$,
- либо $|B_j : B_{j-1}|$ – простое число,
- либо $B_{j-1} \trianglelefteq B_j$ для всех $j = 1, \dots, m$.

Ввиду леммы 5.1 и выбора G подгруппы $A_{n-1} = A(B \cap A_{n-1})$ и $B_{m-1} = (B_{m-1} \cap A)B$ разрешимы.

Группа $G = A_{n-1}B_{m-1}$. Если $|G : A_{n-1}|$ и $|G : B_{m-1}|$ являются простыми числами, то по теореме 4.2 из [5] G разрешима. Это противоречит выбору G . Значит, хотя бы одна из подгрупп A_{n-1} , B_{m-1} нормальна в G . Пусть $A_{n-1} \trianglelefteq G$. Тогда из разрешимости A_{n-1} и $G/A_{n-1} \cong B_{m-1}/A_{n-1} \cap B_{m-1}$ следует разрешимость G . Получили противоречие с выбором G . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.2.1. Пусть группа $G = AB$ – произведение разрешимых подгрупп A и B . Если A и B K - $\mathbb{P}$ -субнормальны в G , то A и B $\mathbb{P}$ -субнормальны в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 5.2 и эквивалентности утверждений 2), 3) леммы 3.4.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть группа $G = AB$ – произведение дисперсивных по Оре подгрупп A и B . Если A и B K - $\mathbb{P}$ -субнормальны в G , то G дисперсивна по Оре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 5.2.1 A и B $\mathbb{P}$ -субнормальны в G . По теореме 4.4 из [5] группа G дисперсивна по Оре.

ТЕОРЕМА 5.4. Если группа G имеет $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимые подгруппы A и B такие, что

$$(|G : A|, |G : B|) = 1, \quad A \text{ } K\text{-}\mathbb{P}\text{-sn } G, \quad B \text{ } K\text{-}\mathbb{P}\text{-sn } G,$$

то $G = AB$ $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $G = AB$ следует из $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Пусть $p \in \pi$ и $P \in \text{Syl}_p(G)$. Если $P^x \subseteq A$ для некоторого $x \in G$, то из $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимости A следует, что P^x K - $\mathbb{P}$ -sn A . Из утверждений 2), 3) леммы 3.2 и того, что A K - $\mathbb{P}$ -sn G , получим P K - $\mathbb{P}$ -sn G . Точно также, если $P^x \subseteq B$, то P K - $\mathbb{P}$ -sn G . Так как p – любое число из множества π , то G – $\bar{w}_\pi$ -сверхразрешимая группа. Теорема доказана.

Группа G называется w -сверхразрешимой [4], если любая силовская подгруппа группы G является $\mathbb{P}$ -субнормальной в G . Класс w -сверхразрешимых групп обозначается через $w\mathfrak{U}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.4.1. Если группа G имеет $\bar{w}$ -сверхразрешимые подгруппы A и B такие, что $(|G : A|, |G : B|) = 1$, A и B K - $\mathbb{P}$ -субнормальны в G , то G w -сверхразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\pi = \mathbb{P}$ по теореме 5.4 группа $G = AB$ $\bar{w}$ -сверхразрешима. Ввиду леммы 3.6 A и B разрешимы. Тогда по теореме 5.2 G разрешима, а значит, G w -сверхразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 5.4.2. Если группа G имеет сверхразрешимые подгруппы A и B такие, что $(|G : A|, |G : B|) = 1$, A и B K - $\mathbb{P}$ -субнормальны в G , то G w -сверхразрешима.

Обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что G/N является группой с абелевыми силовскими подгруппами.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть группа $G = AB$ – произведение $\bar{w}$ -сверхразрешимых подгрупп A и B . Если A и B К- $\mathbb{P}$ -субнормальны в G и обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w -сверхразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.6 подгруппы A и B разрешимы, а значит, w -сверхразрешимы. Из следствия 5.2.1 и теоремы 4.7 из [5] заключаем, что группа G w -сверхразрешима.

Из $\mathcal{U} \subseteq w\mathcal{U} \subseteq \bar{w}\mathcal{U}$ и того, что обобщенный коммутант группы содержится в ее коммутанте, получаем следующие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 5.5.1. Пусть $G = AB$ – произведение К- $\mathbb{P}$ -субнормальных в G сверхразрешимых подгрупп A и B . Если обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G w -сверхразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 5.5.2. Пусть $G = AB$ – произведение К- $\mathbb{P}$ -субнормальных в G сверхразрешимых подгрупп A и B . Если коммутант группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 5.5.3 [13]. Пусть $G = AB$ – произведение нормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Если коммутант группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.

СЛЕДСТВИЕ 5.5.4 [14]. Пусть $G = AB$ – произведение нормальных сверхразрешимых подгрупп A и B . Если обобщенный коммутант группы G нильпотентен, то G сверхразрешима.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.
- [2] A. Ballester-Bolinchés, L. M. Ezquerro, *Classes of Finite Groups*, Math. Appl. (Springer), **584**, Dordrecht, Springer, 2006.
- [3] О. Н. Кегел, “Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die den Subnormalteilerverband echt enthalten”, *Arch. Math. (Basel)*, **30**:3 (1978), 225–228.
- [4] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, “О конечных группах сверхразрешимого типа”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:6 (2010), 1270–1281.
- [5] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, “О произведениях $\mathbb{P}$ -субнормальных подгрупп в конечных группах”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:1 (2012), 59–67.
- [6] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов, “О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам”, *ПФМТ*, 2010, № 2, 21–27.
- [7] V. N. Kniahina, V. S. Monakhov, *Finite groups with $\mathbb{P}$ -subnormal primary cyclic subgroups*, 2011, arXiv:math.GR/1110.4720v2.
- [8] Л. С. Казарин, “О группах с факторизацией”, *Докл. АН СССР*, **256**:1 (1981), 26–29.
- [9] K. Doerk, T. Hawkes, *Finite Soluble Groups*, de Gruyter Exp. Math., **4**, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [10] А. Ф. Васильев, “Новые свойства конечных динильпотентных групп”, *Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук*, 2004, № 2, 29–33.
- [11] *Between Nilpotent and Solvable*, ed. M. Weinstein, Polygonal Publ. House, Washington, NJ, 1982.
- [12] Л. С. Казарин, “О произведении конечных групп”, *Докл. АН СССР*, **269**:3 (1983), 528–531.
- [13] R. Baer, “Classes of finite groups and their properties”, *Illinois J. Math.*, 1957, № 1, 115–187.

- [14] А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, “О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами”, *Изв. вузов. Матем.*, 1997, № 11, 10–14.

А. Ф. Васильев

Гомельский государственный университет

им. Ф. Скорины

E-mail: formation56@mail.ru

Поступило

20.10.2012

Исправленный вариант

31.07.2013

Т. И. Васильева

Белорусский государственный университет

транспорта

E-mail: tivasilyeva@mail.ru

В. Н. Тютянов

Международный университет “МИТСО”

(Гомельский филиал)

E-mail: tyutyantov@front.ru