Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 512.542

О ПЕРМУТИРУЕМЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

А. Ф. Васильев, В. А. Васильев, Т. И. Васильева

Аннотация. Пермутизатор подгруппы H группы G определяется как подгруппа, порожденная всеми циклическими подгруппами из G, перестановочными с H. Будем называть H *пермутируемой* в G, если пермутизатор H в G совпадает с G; *сильно пермутируемой* в G, если пермутизатор H в U совпадает U для любой подгруппы U из G, содержащей H. Изучены конечные группы с заданными системами пермутируемых и сильно пермутируемых подгрупп. Найдены новые характеризации w-сверхразрешимых и сверхразрешимых групп.

Ключевые слова: конечная группа, пермутизатор подгруппы, пермутируемая подгруппа, сверхразрешимая группа, w-сверхразрешимая группа, $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа.

1. Введение

В работе рассматриваются только конечные группы. В теории групп нормализатор подгруппы является классическим понятием, относительно которого имеется много хорошо известных результатов. Например, *для группы G следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *G нильпотентна;*

(2) *$H < N_G(H)$ для любой подгруппы $H < G$ (нормализаторное условие);*

(3) *$N_G(M) = G$ для любой максимальной подгруппы M из G (максимальное нормализаторное условие);*

(4) *$N_G(P) = G$ для любой силовской подгруппы P из G;*

(5) *$N_G(S) = G$ для любой холловой подгруппы S из G;*

(6) *$G = AB$, где A и B — нильпотентные подгруппы из G и $N_G(A) = N_G(B) = G$.*

Естественным обобщением нормализатора подгруппы является понятие пермутизатора подгруппы, введенное в [1, с. 27].

Определение 1. Пусть H — подгруппа группы G. *Пермутизатором* H в G называется подгруппа $P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x\rangle H = H\langle x\rangle\rangle$.

Заменяя в (2)–(6) нормализатор подгруппы ее пермутизатором, получаем следующие интересные задачи.

Задача 1. *Описать все группы G, удовлетворяющие пермутизаторному условию, т. е. группы G, для которых $H < P_G(H)$ для любой $H < G$.*

Эта задача исследовалась в [1, с. 27–29; 2–4] и др.

Задача 2. *Описать все группы G, удовлетворяющие максимальному пермутизаторному условию, т. е. G, для которых $P_G(M) = G$ для любой максимальной подгруппы M из G.*

Эта задача рассматривалась [1, с. 27–29; 5, 6] и др.

Для того чтобы кратко сформулировать утверждения (4)–(6) с точки зрения пермутизаторов подгрупп, введем следующее

Определение 2. Подгруппу H группы G будем называть:

(1) *пермутируемой* в G, если $P_G(H) = G$;

(2) *сильно пермутируемой* в G, если $P_U(H) = U$ для любой подгруппы U из G такой, что $H \leq U \leq G$.

Существуют группы, которые обладают пермутируемыми, но не сильно пермутируемыми подгруппами. Например, легко проверить, что в группе $G = PSL(2,7)$ силовская 3-подгруппа R, изоморфная Z_3, пермутируема в G. Так как $R \leq U \leq G$, где U изоморфна знакопеременной группе A_4 степени 4, и $P_U(R) = R$, то R не сильно пермутируема в G.

Отметим следующие задачи.

Задача 3. *Описать все группы G такие, что*

(a) *любая силовская (холлова) подгруппа из G пермутируема в G;*

(b) *любая силовская (холлова) подгруппа из G сильно пермутируема в G.*

Задача 4. *Описать все группы $G = AB$, где A и B — пермутируемые (сильно пермутируемые) нильпотентные подгруппы из G.*

Настоящая работа посвящена решению задач 3 и 4.

2. Предварительные результаты

Используются обозначения и терминология из [7, 8]. Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

Пусть G — группа. Для подгруппы H из G используются обозначения $H \leq G$ и $H < G$, если $H \neq G$. Через $|G|$ обозначается порядок G; $\pi(G)$ — множество всех различных простых делителей $|G|$; $\mathrm{Syl}_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп из G для некоторого простого числа p; $\mathrm{Syl}(G)$ — множество всех силовских подгрупп из G; $\mathrm{Core}_G(M)$ — ядро подгруппы M в G, т. е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с M в G; $F(G)$ — подгруппа Фиттинга; $F_p(G)$ — произведение всех нормальных p-нильпотентных подгрупп из G; $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел; π — некоторое множество простых чисел; $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$; Z_p — циклическая группа порядка p; $\mathfrak{S}$ — класс всех разрешимых групп; $\mathfrak{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп; $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{A}(p-1)$ — класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$.

Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$, p_i — простое число, называется *дисперсивной по Оре* [7, с. 251], если $p_1 > p_2 > \dots > p_n$ и G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$. *Подгруппа Картера* — это самонормализуемая нильпотентная подгруппа группы. Группа *p-замкнута*, если она имеет нормальную силовскую p-подгруппу.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия: 1) каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$; 2) из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется: 1) *наследственной*, если $\mathfrak{F}$ вместе с каждой группой содержит все ее подгруппы;

2) *насыщенной*, если из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. $G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G, для которой $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Всякая функция $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется *локальным* экраном. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если существует локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ совпадает с классом групп $(G | G/F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G))$.

Лемма 2.1 [7, лемма 3.9]. *Если H/K — главный фактор группы G и $p \in \pi(H/K)$, то $G/C_G(H/K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G) \leq C_G(H/K)$.*

Теорема 2.2 [8, гл. A, теорема 2.7(ii)]. *Пусть G — разрешимая группа. Тогда $F(G)/\Phi(G) = C_{G/\Phi(G)}(F(G)/\Phi(G)) = \mathrm{Soc}(G/\Phi(G))$.*

Определение 2.3 [9]. Подгруппа H группы G называется $\mathbb{P}$-*субнормальной* в G (обозначается через H $\mathbb{P}$-*sn* G), если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$ такая, что $|H_{i+1} : H_i|$ — простое число для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Лемма 2.4 [10, лемма 3.1]. *Пусть H — подгруппа группы G, $N \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если H $\mathbb{P}$-sn G, то $(H \cap N)$ $\mathbb{P}$-sn N и HN/N $\mathbb{P}$-sn G/N;*
(2) *если $N \leq H$ и H/N $\mathbb{P}$-sn G/N, то H $\mathbb{P}$-sn G;*
(3) *если HN_i $\mathbb{P}$-sn G, $N_i \trianglelefteq G$, $i = 1, 2$, то $(HN_1 \cap HN_2)$ $\mathbb{P}$-sn G;*
(4) *если H $\mathbb{P}$-sn K и K $\mathbb{P}$-sn G, то H $\mathbb{P}$-sn G;*
(5) *если H $\mathbb{P}$-sn G, то H^x $\mathbb{P}$-sn G для любого $x \in G$.*

Лемма 2.5 [10, лемма 3.4]. *Пусть G — разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если H $\mathbb{P}$-sn G, K — подгруппа из G, то $(H \cap K)$ $\mathbb{P}$-sn K;*
(2) *если H_i $\mathbb{P}$-sn G, $i = 1, 2$, то $(H_1 \cap H_2)$ $\mathbb{P}$-sn G.*

Группа G называется w-*сверхразрешимой* [9], если любая силовская подгруппа группы G $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Через $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ обозначается класс всех w-сверхразрешимых групп. Заметим, что $\mathfrak{U} \subseteq \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Пример 1 в [9] показывает, что $\mathfrak{U} \neq \mathrm{w}\mathfrak{U}$.

Приведем некоторые свойства w-сверхразрешимых групп.

Предложение 2.6 [9, предложение 2.8]. *Любая w-сверхразрешимая группа дисперсивна по Оре.*

Теорема 2.7 [9, теоремы 2.7 и 2.10]. *Класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ является наследственной насыщенной формацией и имеет локальный экран f такой, что $f(p) = (G \in \mathfrak{S} | \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(p-1))$ для любого простого числа p.*

Теорема 2.8 [9, теорема 2.13]. *Любая бипримарная подгруппа w-сверхразрешимой группы сверхразрешима.*

Теорема 2.9 [1, гл. 1, теорема 1.4]. *Пусть H/K — главный p-фактор группы G. Тогда и только тогда $|H/K| = p$, когда $\mathrm{Aut}_G(H/K)$ — абелева группа экспоненты, делящей $p-1$.*

Подгруппа H группы G называется: 1) *пронормальной* в G, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x \rangle$; 2) *абнормальной* в G, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$.

Лемма 2.10 [7, лемма 17.1]. *Если подгруппа H пронормальна в группе G, то $N_G(H)$ абнормальна в G.*

Лемма 2.11 [7, лемма 17.2]. *Пусть H — подгруппа группы G. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *H абнормальна в G;*

(2) *из $H \leq U \leq G$ и $H \leq U \cap U^x$ всегда следует $x \in U$;*

(3) *H пронормальна в G и $U = N_G(U)$ для $H \leq U \leq G$;*

(4) *H пронормальна в G и $H = N_G(H)$.*

Лемма 2.12 [7, лемма 17.5]. *Пусть H — подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если H пронормальна в G и $H \leq U \leq G$, то H пронормальна в U;*

(2) *если $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H$, то H пронормальна в G тогда и только тогда, когда H/N пронормальна в G/N;*

(3) *если $N \trianglelefteq G$ и H пронормальна в G, то HN/N пронормальна в G/N;*

(4) *если H пронормальна и субнормальна в G, то $H \trianglelefteq G$.*

Лемма 2.13 [11, лемма 2]. *Пусть группа $G = AB$ — произведение нильпотентных подгрупп A и B, пусть G имеет минимальную нормальную подгруппу N такую, что $N = C_G(N) \neq G$. Тогда*

(1) *$A \cap B = 1$;*

(2) *$N \leq A \cup B$;*

(3) *если $N \leq A$, то A — p-группа для некоторого простого числа p и B — p'-группа.*

Группа G обладает свойством E_π, если G имеет по крайней мере одну холлову π-подгруппу; обладает свойством D_π, если G имеет в точности один класс сопряженных холловых π-подгрупп и каждая π-подгруппа из G содержится в некоторой холловой π–подгруппе из G.

Лемма 2.14 [12]. *Пусть группа $G = AB$ обладает свойством D_π, и пусть подгруппы A и B обладают свойством E_π. Тогда существуют холловы π-подгруппы A_π и B_π из A и B соответственно такие, что $A_\pi B_\pi = B_\pi A_\pi$ — холлова π-подгруппа из G.*

3. Свойства пермутируемых подгрупп

Лемма 3.1. *Пусть H — подгруппа группы G. Тогда*

(1) *$P_U(H) \leq P_G(H)$ для любой подгруппы U группы G такой, что $H \leq U$;*

(2) *если $P_G(H) = R$, то $P_R(H) = R$;*

(3) *$P_G(H)^g = P_G(H^g)$ для любого элемента $g \in G$;*

(4) *$N_G(H) \leq P_G(H)$;*

(5) *если $N \trianglelefteq G$, то $P_G(H)N/N \leq P_{G/N}(HN/N)$;*

(6) *если $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H$, то $P_{G/N}(H/N) = P_G(H)/N$.*

Доказательство. Утверждения (1) и (2) следуют из определения $P_G(H)$.

(3). Пусть $g \in G$. Допустим, что $P_G(H) = \langle L \rangle$, где $L = \{x \in G \mid \langle x \rangle H = H\langle x \rangle\}$, и $P_G(H^g) = \langle K \rangle$, где $K = \{y \in G \mid \langle y \rangle H^g = H^g\langle y \rangle\}$. Ясно, что $P_G(H)^g = \langle L^g \rangle$.

Возьмем любой $z \in L^g$. Тогда $z = x^g$ для некоторого $x \in L$. Из $\langle x^g \rangle H^g = \langle x \rangle^g H^g = (\langle x \rangle H)^g = (H\langle x \rangle)^g = H^g\langle x^g \rangle$ получаем, что $L^g \subseteq K$.

Рассмотрим любой $y \in K$. Из $y^{g^{-1}} \in K^{g^{-1}}$ получаем, что $\langle y^{g^{-1}} \rangle H = \langle y \rangle^{g^{-1}}(H^g)^{g^{-1}} = (\langle y \rangle H^g)^{g^{-1}} = (H^g\langle y \rangle)^{g^{-1}} = H\langle y^{g^{-1}} \rangle$. Отсюда $K \subseteq L^g$.

Значит, $P_G(H)^g = \langle L^g\rangle = \langle K\rangle = P_G(H^g)$.

Утверждения (4)–(6) — это лемма 2.4 из [6]. Лемма доказана.

Легко проверяется следующая

Лемма 3.2. *Пусть H — подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$. Тогда*

(1) *если H пермутируема в G, то HN/N пермутируема в G/N;*

(2) *если H пермутируема в G, то HN пермутируема в G;*

(3) *если $N \leq H$, то H пермутируема в G тогда и только тогда, когда H/N пермутируема в G/N;*

(4) *если H сильно пермутируема в G, то HN/N сильно пермутируема в G/N.*

Лемма 3.3. *Пусть группа $G = HQ$, где $H \in \mathrm{Syl}_p(G)$, p — наибольший простой делитель $|G|$, Q — циклическая подгруппа из G. Тогда G p-замкнута.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Так как G является произведением нильпотентных подгрупп, по теореме Кегеля — Виландта [13, 14] G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда G/N p-замкнута. Поскольку класс всех p-замкнутых групп является насыщенной формацией, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$, $M \cap N = 1$, $\mathrm{Core}_G(M) = 1$ и $N = C_G(N)$. Если N — p-группа, то $HN/N = H/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$, откуда $H \trianglelefteq G$. Получили противоречие с выбором G. Пусть N — q-группа, $q \neq p$. Ввиду теоремы Силова $H^g \subseteq M$ для некоторого $g \in G$ и $N \subseteq Q$. Тогда $|N| = q$. Отсюда $M \simeq G/C_G(N)$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}(Z_q) \simeq Z_{q-1}$. Это противоречит тому, что $p > q$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть $H \in \mathrm{Syl}_p(G)$, p — наибольший простой делитель $|G|$. Если H пермутируема в G, то G p-замкнута.*

Доказательство. Пусть x — любой элемент группы G такой, что $\langle x\rangle H = H\langle x\rangle$. Тогда $\langle x\rangle H$ — подгруппа из G. По лемме 3.3 $H \trianglelefteq \langle x\rangle H$. Поэтому $\langle x\rangle \leq N_G(H)$ и $G = P_G(H) \leq N_G(H)$. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Если любая силовская подгруппа группы G пермутируема в G, то G дисперсивна по Оре.*

Доказательство проведем индукцией по $|G|$. Можно считать, что $|\pi(G)| > 1$. Пусть $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_k$, p_i — простое число, $i = 1, 2, \dots, k$. Для $P_1 \in \mathrm{Syl}_{p_1}(G)$ по лемме 3.4 $P_1 \trianglelefteq G$. Любая силовская p_i-подгруппа фактор-группы G/P_1 имеет вид P_iP_1/P_1, где $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, $i = 2, \dots, k$. Ввиду п. (1) леммы 3.2 P_iP_1/P_1 пермутируема в G/P_1. По индукции G/P_1 дисперсивна по Оре. Отсюда G дисперсивна по Оре. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Если G — сверхразрешимая группа, то любая пронормальная подгруппа из G сильно пермутируема в G.*

Доказательство. В силу наследственности $\mathfrak{U}$ и п. (1) леммы 2.12 достаточно доказать, что любая пронормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{U}$ пермутируема в G.

Пусть G — сверхразрешимая группа наименьшего порядка такая, что $P_G(H) \neq G$ для некоторой пронормальной подгруппы H из G. Допустим, что $\Phi = \Phi(G) \neq 1$. Тогда $G/\Phi \in \mathfrak{U}$, по п. (3) леммы 2.12 $H\Phi/\Phi$ пронормальна в G/Φ. Заметим, что $H\Phi/\Phi \neq 1$, так как в противном случае из $H \leq \Phi$ и п. (4) леммы 2.12 получается противоречие с $P_G(H) = N_G(H) = G \neq P_G(H)$. Из выбора G следует, что $P_{G/\Phi}(H\Phi/\Phi) = G/\Phi$. Ввиду п. (6) леммы 3.1 заключаем, что $P_G(H\Phi) = G$. Поскольку $P_G(H) \neq G$, в G найдется элемент x такой, что $x \notin P_G(H)$ и $\langle x \rangle H\Phi = H\Phi\langle x \rangle$. Тогда $R = \langle x \rangle H\Phi$ — подгруппа группы G. Если $R \neq G$, то из выбора G следует, что $P_R(H) = R$. Поэтому $x \in R = P_R(H) \leq P_G(H)$. Получили противоречие с $x \notin P_G(H)$. Значит, $R = \langle x \rangle H\Phi = G = \langle x \rangle H$. Поэтому $x \in P_G(H)$. Получили противоречие с выбором x.

Таким образом, $\Phi(G) = 1$. Группа G принадлежит $\mathfrak{U}$, поэтому ее коммутант G' принадлежит $\mathfrak{N}$. Из выбора G следует, что $N_G(H) \neq G$. По лемме 2.10 подгруппа $N_G(H)$ абнормальна в G. Отсюда ввиду $G'N_G(H) \trianglelefteq G$ и п. (3) леммы 2.11 $G = G'N_G(H) = F(G)N_G(H)$. По теореме 2.2 $F(G) = N_1 \ldots N_k$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа группы G для $i = 1, \ldots, k$. Из сверхразрешимости G следует, что N_i — циклическая подгруппа простого порядка. Из $N_iH = HN_i$ получаем, что $N_i \leq P_G(H)$ для любого $i = 1, \ldots, k$. Поэтому $F(G) \leq P_G(H)$. Но тогда $G = F(G)N_G(H) \leq P_G(H)$. Получили противоречие с $P_G(H) \neq G$. Лемма доказана.

Следствие 3.6.1. *Если G — сверхразрешимая группа, то любая силовская подгруппа из G сильно пермутируема в G.*

Следствие 3.6.2. *Если G — сверхразрешимая группа, то любая подгруппа Картера из G сильно пермутируема в G.*

Следствие 3.6.3. *Если G — сверхразрешимая группа, то любая холлова подгруппа из G сильно пермутируема в G.*

Сверхразрешимая группа может обладать не пермутируемыми в ней подгруппами.

Пример 3.7. Пусть $G = \langle a, b \mid a^4 = b^4 = (ab)^2 = (a^{-1}b)^2 = 1 \rangle$ — неабелева группа порядка 16 [15, с. 194]. Отметим, что G не имеет элементов порядка 8. Подгруппа $H = \langle ab \rangle$ не пермутируема в G. Действительно, возьмем любой элемент $z \in G$ такой, что $\langle z \rangle H = H\langle z \rangle$. Прямая проверка с использованием таблицы умножения элементов группы показывает, что $|z| = 2$. Тогда $H \trianglelefteq \langle z \rangle H$. Поэтому $z \in N_G(H)$. Отсюда и из $aH \neq Ha$ следует, что $P_G(H) = N_G(H) \neq G$.

Пример 3.7 показывает также, что пересечение пермутируемых подгрупп в группе не всегда является пермутируемой подгруппой группы. Используя таблицу умножения элементов группы G, получаем, что $H_1 = \langle a^2 \rangle \times \langle ab \rangle$ и $H_2 = \langle ab^{-1} \rangle \times \langle ab \rangle$ — подгруппы порядка 4 группы G. Далее проверкой устанавливаем, что $\langle b \rangle H_1 = H_1\langle b \rangle = G$, но $bH_1 \neq H_1b$ и $\langle a \rangle H_2 = H_2\langle a \rangle = G$, но $aH_2 \neq H_2a$. Отсюда следует, что $N_G(H_i) < P_G(H_i)$, $i = 1, 2$. Из нильпотентности G заключаем, что $H_i < N_G(H_i)$, $i = 1, 2$. Значит, $P_G(H_i) = G$, т. е. H_i — пермутируемая подгруппа в G, $i = 1, 2$. Заметим, что $H = \langle ab \rangle = H_1 \cap H_2$.

Лемма 3.8. *Пусть G — разрешимая группа. Если H — $\mathbb{P}$-субнормальная холлова подгруппа из G, то H сильно пермутируема в G.*

Доказательство. Ввиду наследственности $\mathfrak{S}$ и п. (1) леммы 2.5 достаточно доказать, что любая $\mathbb{P}$-субнормальная холлова подгруппа группы $G \in \mathfrak{S}$ пермутируема в G.

Пусть G — разрешимая группа наименьшего порядка такая, что $P_G(H) \neq G$ для некоторой $\mathbb{P}$-субнормальной холловой π-подгруппы H из G. Пусть N —

минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда HN/N — холлова π-подгруппа из G/N. По п. (1) леммы 2.4 HN/N $\mathbb{P}$-sn G/N. По выбору G холлова π-подгруппа HN/N пермутируема в G/N. По п. (3) леммы 3.2 HN пермутируема в G. Поэтому N — q-группа для некоторого простого $q \notin \pi$. Из H $\mathbb{P}$-sn G вытекает, что в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $H \leq M$ и $|G : M|$ — простое число. По п. (1) леммы 2.5 H $\mathbb{P}$-sn M. Из выбора G следует, что $M = P_M(H) \leq P_G(H) \neq G$. Поэтому $M = P_G(H)$. Так как $G = P_G(HN)$, в G найдется x такой, что $x \notin M$ и $\langle x\rangle HN = HN\langle x\rangle$. Отсюда и из $P_G(H) = M$ вытекает, что $G = \langle x\rangle HN$. Если $N \leq \Phi(G)$, то $G = \langle x\rangle H$. Значит, $x \in P_G(H) = M$, что противоречит $x \notin M$.

Итак, $N \not\leq \Phi(G)$. Тогда в G существует максимальная подгруппа W такая, что $N \not\leq W$ и $G = NW$. Отсюда $|G : W|$ — q-число и $H \leq W^g$ для некоторого $g \in G$. Тогда $W^g = P_{W^g}(H) \leq P_G(H) = M$ и $G = NM$.

Допустим, что $HN \neq G$. Тогда из выбора G заключаем, что $HN = P_{HN}(H) \leq P_G(H) = M$. Получили противоречие с $G = NM \leq M \neq G$.

Значит, $HN = G$. Из $N \cap M = 1$ следует, что $H = M$. Тогда $|N| = q$. Ввиду $HN = NH$ получаем, что $N \leq P_G(H) = M$, откуда $G \leq M \neq G$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

Следствие 3.8.1. *Если G — w-сверхразрешимая группа, то любая силовская подгруппа из G сильно пермутируема в G.*

4. Характеризации w-сверхразрешимых и сверхразрешимых групп

Теорема 4.1. *Группа G w-сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая силовская подгруппа группы G сильно пермутируема в G.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = (G \mid$ любая силовская подгруппа группы G сильно пермутируема в $G)$. Ввиду следствия 3.8.1 $\mathrm{w}\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Так как $P_G(H) = G$ для любой силовской подгруппы H группы G, по лемме 3.5 G дисперсивна по Оре. Значит, G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Возьмем любую силовскую p-подгруппу R/N группы G/N. В G найдется $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ такая, что $R/N = PN/N$. Из $G \in \mathfrak{F}$ и п. (4) леммы 3.2 следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Так как $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ — насыщенная формация по теореме 2.7, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$. Пусть $|G| = p_1^{n_1}p_2^{n_2}\dots p_k^{n_k}$, где p_i — простое число, $i = 1, 2, \dots, k$, и $p_1 > p_2 > \dots > p_k$. Обозначим через P_i силовскую p_i-подгруппу группы G, $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда $N \leq P_1$ и $P_1 \trianglelefteq G$. Заметим, что P_1 $\mathbb{P}$-sn G.

Обозначим $H_i = P_iP_1$, $i \in \{2, \dots, k\}$.

Если $H_i \neq G$ для любого $i \in \{2, \dots, k\}$, то $H_i \in \mathfrak{F}$. По выбору G группа H_i w-сверхразрешима. Из наследственности формации $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ вытекает, что $P_iN \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Поэтому P_i $\mathbb{P}$-sn P_iN. Из $G/N \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и п. (2) леммы 2.4 следует, что P_iN $\mathbb{P}$-sn G. По п. (4) леммы 2.4 получаем, что P_i $\mathbb{P}$-sn G, откуда $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Это противоречит выбору G.

Значит, $H_i = G$ для некоторого $i \in \{2, \dots, k\}$. Из $\Phi(G) = 1$ имеем $G = NM$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G, $M \cap N = 1$ и $N = C_G(N)$. Из $G/N \simeq M$ и леммы 2.1 следует, что $P_1 \cap M = 1$. Поэтому $N = P_1$ и $M = P_i$. Ввиду того, что $P_G(P_i) = G$, найдется элемент y группы G такой, что $y \notin P_i$, $\langle y\rangle P_i = P_i\langle y\rangle$. Тогда $G = \langle y\rangle P_i$, откуда $|N| = p_1$. Значит, G сверхразрешима. Получили противоречие с выбором G. Теорема доказана.

Напомним [8, с. 519], что *нильпотентной длиной* разрешимой группы G называется наименьшее натуральное число l такое, что $F_l(G) = G$, где подгруппа $F_i(G)$ определяется рекурсивно следующим образом: $F_0(G) = 1$ и $F_i(G)/F_{i-1}(G) = F(G/F_{i-1}(G))$ для всех $i \geq 1$. Предложение 2.5 из [9] показывает, что нильпотентную длину w-сверхразрешимой группы нельзя ограничить фиксированным натуральным числом. Так как сверхразрешимая группа имеет нильпотентный коммутант, нильпотентная длина сверхразрешимой группы не превосходит 2, т. е. сверхразрешимая группа метанильпотентна.

Теорема 4.2. *Пусть G — метанильпотентная группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *G сверхразрешима;*

(2) *любая силовская подгруппа из G сильно пермутируема в G;*

(3) *любая силовская подгруппа из G пермутируема в G.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) по следствию 3.6.1.

(2) $\Rightarrow$ (3) ввиду определения 2.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\mathfrak{F} = (G \mid$ группа G метанильпотентна и любая силовская подгруппа группы G пермутируема в $G)$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{U}$. Метанильпотентность G влечет разрешимость G. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Ясно, что G/N метанильпотентна. Для $R/N \in \mathrm{Syl}_p(G/N)$ (p — любое простое число из $\pi(G)$) найдется такая $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, что $R/N = PN/N$. Ввиду п. (1) леммы 3.2 R/N пермутируема в G/N. Поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$. Из выбора G получаем, что $G/N \in \mathfrak{U}$. Так как $\mathfrak{U}$ — насыщенная формация, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = NM$, где M — максимальная подгруппа группы G, $N \cap M = 1$ и $\mathrm{Core}_G(M) = 1$. Поскольку N — элементарная абелева p-группа для некоторого $p \in \pi(G)$ и $N = C_G(N)$, используя лемму 2.1, получаем, что $N = G^{\mathfrak{N}} = F(G)$ и $G/N \simeq M$ — нильпотентная p'-группа. По лемме 3.5 G дисперсивна по Оре. Тогда для $|G| = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ (p_i — простое число, $i = 1, 2, \dots, k$, и $p_1 > p_2 > \dots > p_k$), для силовской p_1-подгруппы P_1 имеем $P_1 \trianglelefteq G$. Отсюда следует, что $p = p_1$ и $N = P_1$.

Зафиксируем $i \in \{2, \dots, k\}$. Пусть $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$ и $P_i \leq M$. Так как $P_G(P_i) = G$, найдется элемент $x \in G$ такой, что $\langle x \rangle P_i = P_i \langle x \rangle$ и $x \notin M$.

Если $\langle x \rangle$ — p_1'-группа, то $\langle x \rangle P_i$ также является p_1'-группой. Из разрешимости G следует, что $\langle x \rangle P_i \leq M^g$ для некоторого $g \in G$. Тогда $\langle x \rangle^{g^{-1}} P_i^{g^{-1}} \leq M$. Так как $P_i^{g^{-1}}$ — силовская p_i-подгруппа в нильпотентной группе M, получаем $P_i^{g^{-1}} = P_i$. Значит, $g^{-1} \in N_G(P_i) = M$. Поэтому $g \in M$. Отсюда $x \in \langle x \rangle P_i \leq M^g = M$. Получили противоречие с $x \notin M$.

Таким образом, $\langle x \rangle$ — не p_1'-группа. Пусть $\langle z \rangle \in \mathrm{Syl}_{p_1}(\langle x \rangle)$. Ясно, что $\langle z \rangle \in \mathrm{Syl}_{p_1}(\langle x \rangle P_i)$ и $\langle z \rangle = P_1 \cap \langle x \rangle P_i \trianglelefteq \langle x \rangle P_i$. Поэтому $\langle z \rangle P_i$ — подгруппа в $\langle x \rangle P_i$. Поскольку $\langle z \rangle \leq P_1$ и P_1 — элементарная абелева p_1-группа, заключаем, что $|\langle z \rangle| = p_1$.

Обозначим $R_i = \langle z \rangle P_i$. Подгруппа P_i максимальна в R_i. Из $N_G(P_i) = M$ следует, что $\langle z \rangle \not\subseteq N_{R_i}(P_i)$. Поэтому $N_{R_i}(P_i) = P_i$. Покажем, что $C_i = C_{R_i}(\langle z \rangle) \cap P_i = 1$. Допустим, что $C_i \neq 1$. Тогда $\langle z \rangle \leq N_G(C_i)$ и $P_i \leq N_{R_i}(C_i) \leq N_G(C_i)$. Так как M нильпотентна, получаем, что $P_j \leq N_G(C_i)$ для любого $j \in \{2, \dots, k\}$, $j \neq i$. Значит, $M \leq N_G(C_i)$ и $M \neq N_G(C_i)$. Отсюда следует, что $C_i \trianglelefteq G$. Поэтому $1 \neq C_i \leq \mathrm{Core}_G(M) = 1$. Получили противоречие.

Итак, $C_i = C_{R_i}(\langle z\rangle) \cap P_i = 1$. Тогда $P_i \simeq R_i/\langle z\rangle = R_i/C_{R_i}(\langle z\rangle)$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}(Z_{p_1}) \simeq Z_{p_1-1}$.

Таким образом, $P_i \in \mathfrak{A}(p_1-1)$ для любого $i \in \{2,\dots,k\}$. Ввиду нильпотентности M получаем, что $M \in \mathfrak{A}(p_1-1)$. Из $M \simeq G/N = G/C_G(N)$ по теореме 2.9 заключаем, что $|N| = p_1$. Поэтому G сверхразрешима. Это противоречит выбору G. Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Пусть G — группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *G сверхразрешима;*

(2) *любая пронормальная подгруппа из G сильно пермутируема в G;*

(3) *любая пронормальная подгруппа из G пермутируема в G;*

(4) *любая холлова подгруппа из G сильно пермутируема в G;*

(5) *любая холлова подгруппа из G пермутируема в G.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) по лемме 3.6.

(2) $\Rightarrow$ (3) ввиду определения 2.

(2) $\Rightarrow$ (4). Так как любая силовская подгруппа группы G пронормальна в G, в силу (2) и леммы 3.5 G разрешима. Тогда любая холлова подгруппа из G пронормальна в G и по (2) сильно пермутируема в G.

(4) $\Rightarrow$ (5) ввиду определения 2.

(3) $\Rightarrow$ (5). Из (3) и леммы 3.5 следует разрешимость G. Тогда любая холлова подгруппа из G пронормальна в G и по (3) пермутируема в G.

(5) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\mathfrak{F} = (G \mid$ любая холлова подгруппа группы G пермутируема в $G)$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{U}$. Тогда любая силовская подгруппа из G пермутируема в G. По лемме 3.5 G дисперсивна по Оре. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Для любого множества простых чисел π возьмем любую холлову π-подгруппу K/N из G/N. Из разрешимости G следует, что $K/N = SN/N$ для некоторой холловой π-подгруппы S группы G. Из $G \in \mathfrak{F}$ и п. (1) леммы 3.2 заключаем, что $K/N = SN/N$ пермутируема в G/N. Тогда $G/N \in \mathfrak{F}$. Из выбора G следует, что $G/N \in \mathfrak{U}$. Так как $\mathfrak{U}$ — насыщенная формация, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$, $M \cap N = 1$, $N = C_G(N)$. Ввиду $P \trianglelefteq G$ для $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ (p — наибольший простой делитель $|G|$) получаем, что $N \leq P$. Из $P \cap M \trianglelefteq M$ и леммы 2.1 следует, что $P \cap M = 1$. Поэтому $N = P$ и M — холлова ω-подгруппа для $\omega = \pi(G) \setminus \{p\}$. Тогда M пермутируема в G. Тем самым найдется $x \in G$, $x \notin M$, такой, что $\langle x\rangle M = G$. Тогда силовская p-подгруппа группы $\langle x\rangle$ является силовской p-подгруппой группы G. Следовательно, $|N| = p$. Отсюда $M \simeq G/C_G(N)$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}(Z_p) \simeq Z_{p-1}$. Поэтому $G \in \mathfrak{U}$. Получили противоречие с выбором G. Итак, (5) $\Rightarrow$ (1) доказано.

Теорема полностью доказана.

Следствие 4.3.1 [16]. *Если любая холлова подгруппа группы G $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Так как любая силовская подгруппа группы G $\mathbb{P}$-субнормальна в G, G разрешима ввиду предложения 2.6. Из леммы 3.8 и теоремы 4.3 заключаем, что G сверхразрешима.

Пример 4.4. Ввиду леммы 2.11 всякая абнормальная подгруппа пронормальна в группе. В симметрической группе S_4 степени 4 силовские 2-подгруппы и подгруппы, изоморфные симметрической группе S_3 степени 3, составляют множество всех абнормальных подгрупп в S_4, причем они пермутируемы в группе. Так как S_4 не сверхразрешима, в пп. (2) и (3) теоремы 4.3 нельзя заменить условие пронормальности подгруппы абнормальностью.

Теорема 4.5. *Пусть G — группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *G сверхразрешима;*

(2) *$G = AB$ — произведение сильно пермутируемых нильпотентных подгрупп A и B из G;*

(3) *$G = AB$ — произведение пермутируемых нильпотентных подгрупп A и B из G.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Если G сверхразрешима, то $G = F(G)H$, где H — подгруппа Картера из G. Подгруппы $F(G)$ и H нильпотентны. Ввиду $F(G) \trianglelefteq G$ и следствия 3.6.2 заключаем, что $F(G)$ и H сильно пермутируемы в G.

(2) $\Rightarrow$ (3) очевидно.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\mathfrak{F} = (G \mid$ группа $G = AB$ — произведение нильпотентных подгрупп A, B таких, что A и B пермутируемы в $G)$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{U}$. По теореме Кегеля — Виландта [13, 14] G разрешима. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Из $AN/N \simeq A/A \cap N \in \mathfrak{N}$, $BN/N \simeq B/B \cap N \in \mathfrak{N}$ и п. (1) леммы 3.2 следует, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/N \in \mathfrak{U}$. Поэтому N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $\Phi(G) = 1$. В G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1, \mathrm{Core}_G(M) = 1$. Заметим, что $N = C_G(N)$ и N — элементарная абелева p-группа для некоторого $p \in \pi(G)$.

Ввиду пп. (1) и (2) леммы 2.13 либо $N \leq A$, либо $N \leq B$. Действительно, пусть $1 \neq x \in A \cap N$ и $1 \neq y \in B \cap N$. Из п. (1) леммы 2.13 следует, что $x \neq y$. В силу п. (2) леммы 2.13 $xy \in N \subseteq A \cup B$. Тогда либо $xy \in A$, либо $xy \in B$. Если $xy \in A$, то $y \in x^{-1}A = A$. Если $xy \in B$, то $x \in By^{-1} = B$. В обоих случаях получаем противоречие с п. (1) леммы 2.13.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $N \leq A$. Тогда по п. (3) леммы 2.13 A — силовская p-подгруппа и B — холлова p'-подгруппа из G.

Рассмотрим любой $x \in G$, для которого $\langle x \rangle B = B \langle x \rangle$ и $x \notin B$. Пусть $R = \langle x \rangle B$ и $\langle x \rangle = \langle z \rangle \langle y \rangle$, где $\langle z \rangle \in \mathrm{Syl}_p(\langle x \rangle)$ и $\langle y \rangle$ — холлова p'-подгруппа из $\langle x \rangle$. Ясно, что $\langle x \rangle$ не является p'-группой. По лемме 2.14 $\langle y \rangle B$ есть холлова p'-подгруппа группы R. Поэтому $\langle y \rangle \leq B$ и $R = \langle z \rangle B$.

Пусть $B = P_1 \dots P_k$, где $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(B)$, $i = 1, \dots, k$. Возьмем любое $i \in \{1, \dots, k\}$. По лемме 2.14 для $\pi_i = \{p, p_i\}$ в R существует холлова π_i-подгруппа $\langle z \rangle P_i = P_i \langle z \rangle$. Тогда $\langle x \rangle P_i = \langle z \rangle \langle y \rangle P_i = \langle z \rangle P_i \langle y \rangle = P_i \langle z \rangle \langle y \rangle = P_i \langle x \rangle$. Следовательно, $x \in P_G(P_i)$. Имеем $B \leq N_G(P_i) \leq P_G(P_i)$. Отсюда $G = P_G(B) \leq P_G(P_i)$, т. е. $G = P_G(P_i)$. Так как $A \in \mathrm{Syl}_p(G)$, $P_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$, ввиду п. (3) леммы 3.1 заключаем, что $G = P_G(H)$ для любой $H \in \mathrm{Syl}(G)$.

По лемме 3.5 группа G дисперсивна по Оре. Поскольку N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и N — p-группа, получаем, что p — наибольший простой делитель $|G|$. Тогда из $N \leq A \in \mathrm{Syl}_p(G)$ следует, что $A \trianglelefteq G$. По лемме 2.1 $G/C_G(N) = G/N \simeq M$ не имеет неединичных нормальных p-подгрупп. Поэтому $A \cap M = 1$ и $N = A$. Из $G = AB = NB$ следует, что B — максимальная подгруппа группы G. Ввиду $P_G(B) = G$ и $B \neq G$ найдется $g \in G$ такой, что $\langle g \rangle B = B \langle g \rangle$ и $g \notin B$. Тогда $G = \langle g \rangle B$. Поэтому A —

циклическая группа и $|A| = p$. Итак, $G/C_G(A) = G/A$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}(Z_p) \simeq Z_{p-1}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{U}$. Получили противоречие с выбором G. Теорема доказана.

Следствие 4.5.1. *Пусть $G = AB$ — произведение своих силовских подгрупп A и B. Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда A и B пермутируемы в G.*

Следствие 4.5.2. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда группа $G = F(G)H$, где H — пермутируемая подгруппа Картера из G.*

Авторы выражают благодарность рецензенту за тщательное чтение рукописи и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Between nilpotent and solvable* / Ed. by M. Weinstein. Passaic: Polygonal Publ. House, 1982.
2. *Zhang J.* A note on finite groups satisfying the permutizer condition // Sci. Bull. 1986. V. 31. P. 363–365.
3. *Beidleman J. C., Robinson D. J. S.* On finite groups satisfying the permutizer condition // J. Algebra. 1997. V. 191, N 2. P. 686–703.
4. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R.* On a question of Beidleman and Robinson // Comm. Algebra. 2002. V. 30, N 12. P. 5757–5770.
5. *Liu X., Wang Ya.* Implications of permutizers of some subgroups in finite groups // Comm. Algebra. 2005. V. 33. P. 559–565.
6. *Qiao Sh., Qian G., Wang Ya.* Influence of permutizers of subgroups on the structure of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2008. V. 212, N 10. P. 2307–2313.
7. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
8. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
9. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
10. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 59–67.
11. *Heineken H.* Products of finite nilpotent groups // Math. Ann. 1990. V. 287. P. 643–652.
12. *Pennington E. A.* Trifactorisable groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1973. V. 8, N 3. P. 461–469.
13. *Kegel O. H.* Produkte nilpotenter Gruppen // Arch. Math. 1961. V. 12, N 1. P. 90–93.
14. *Wielandt H.* Über Produkte von nilpotenten Gruppen. III // J. Math. 1958. Bd 2, Heft 4B. S. 611–618.
15. *Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж.* Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука, 1980.
16. *Kniahina V., Monakhov V.* On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Int. J. Group Theory. 2013. V. 2, N 4. P. 21–29.

Статья поступила 27 мая 2013 г.

Васильев Александр Федорович, Васильев Владимир Александрович
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
formation56@mail.ru, VovichX@mail.ru

Васильева Татьяна Ивановна
Белорусский гос. университет транспорта,
ул. Кирова, 34, Гомель 246653, Беларусь
tivasilyeva@mail.ru