

Н. А. СТРЕЛКОВ

ОБ АППРОКСИМАЦИЯХ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 19 VI 1972)

В настоящей работе изучается аппроксимация пространств типа С. Л. Соболева, основанная на использовании кусочно-полиномиальных функций специального вида. При решении проекционными методами линейных эллиптических уравнений $2m$ -го порядка с использованием описанных в работе базисных функций возникают проекционно-разностные операторы (п.р.о.), более близкие по своим свойствам к обычным разностным аппроксимациям, чем операторы, построенные с использованием аналогов полилинейных восполнений (^{1, 2}). Вследствие этого предлагаемые п.р.о. эквивалентны по спектру (^{3, 4}) обычным разностным операторам с константами эквивалентности, имеющими меньший разброс, что существенно при решении получающихся алгебраических систем.

1°. Пусть R_n — n -мерное евклидово пространство, $\{e_\nu\}_{\nu=1}^n$ — ортонормированный репер в R_n , R_n^h — прямоугольная сетка в R_n , характеризуемая вектором $h \equiv (h_1, \dots, h_n)$, $h \equiv h_1 \dots h_n$, $|h| = \max_{1 \leq \nu \leq n} h_\nu$, H^h — пространство функций, определенных на R_n^h . Если $u^h \in H^h$, то u_α^h — значение сеточной функции u^h в узле $\alpha \equiv (\alpha_1 h_1, \dots, \alpha_n h_n)$. Для функциональных пространств используем обычные обозначения $C^l(\Omega)$, $L_2(\Omega)$, $W_2^l(\Omega) \equiv H_l(\Omega)$ (⁵), где Ω — область в R_n , l — натуральное число. Помимо пространств Соболева $H_l(\Omega)$ с натуральным l , будут применяться обобщенные пространства $H_l(\Omega)$ дробного порядка (⁶) с нормой

$$\|u\|_{H_l(\Omega)}^2 \equiv \|u\|_{H_{[l]}(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \sum_{|k|=[l]} \frac{|D^k u(x) - D^k u(y)|^2}{|x - y|^{n+2\gamma}} dx dy,$$

где $l \geq 0$, $[l]$ — целая часть l , $\gamma = l - [l]$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $k_\nu \geq 0$, $\nu = 1, 2, \dots, n$; $|k| \equiv k_1 + \dots + k_n$;

$$D^k \equiv \prod_{\nu=1}^n D_\nu^{k_\nu}, \quad D_\nu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\nu}; \quad |x - y| \equiv \left(\sum_{\nu=1}^n (x_\nu - y_\nu)^2 \right)^{1/2}.$$

Модуль непрерывности функции $u \in H_l$ будем обозначать так:

$$\omega_l(u, t) \equiv \sup_{|y| \leq t} \|u(x) - u(x + y)\|_{H_l}$$

(здесь и далее для краткости пишем H_l вместо $H_l(R_n)$). Рассмотрим операторы усреднения

$$r_\nu u(x) \equiv \int_{-1/2}^{1/2} u(x_1, \dots, x_{\nu-1}, x_\nu + th_\nu, x_{\nu+1}, \dots, x_n) dt;$$

$$ru(x) \equiv \left(\prod_{\nu=1}^n r_\nu \right) u(x) \equiv h^{-1} \int_{\Pi} u(x + y) dy,$$

где $\Pi \equiv \{y \in R_n, |y_\nu| \leq 1/2 h_\nu, \nu = 1, 2, \dots, n\}$; $Su(x) \equiv \int_{-1/2}^{1/2} u(x_1 + th_1, \dots, x_n + th_n) dt.$

Пусть

$$\varphi_{\alpha}^{(0)}(x) = \begin{cases} 1, & -1/2 h_{\nu} < x_{\nu} - \alpha_{\nu} h_{\nu} \leq 1/2 h_{\nu}, \quad \nu = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{в остальных точках } R_n, \end{cases}$$

где $\alpha \in R_n^h$; H_0^h — замкнутая линейная оболочка $\{\varphi_{\alpha}^{(0)}\}$, $\alpha \in R_n^h$;

$$(q_0^h u^h)(x) \equiv \sum_{\alpha \in R_n^h} u_{\alpha}^h \varphi_{\alpha}^{(0)}(x).$$

Определим при любом целом $k \geq 1$ функции $\varphi_{\alpha}^{(k)}(x) \equiv r^{k-1} S \varphi_{\alpha}^{(0)}(x)$ и линейный оператор *

$$q_k^h u^h(x) \equiv \sum_{\alpha \in R_n^h} u_{\alpha}^h \varphi_{\alpha}^{(k)}(x) \equiv r^{k-1} S q_0^h u^h(x), \quad (1)$$

отображающий H^h в подпространство $H_k^h \subset H_h$, являющееся замкнутой линейной оболочкой $\{\varphi_{\alpha}^{(k)}\}$, $\alpha \in R_n^h$. Заметим, что оператор q_1^h совпадает с оператором симплициального восполнения сеточных функций, описанным в (7).

Теорема 1. Если $u \in H_h$ (k натуральное), то существует такая функция $\tilde{u} \in H_h^h$, что $\|u - \tilde{u}\|_{H_k} \leq C_1 \omega_h(u, |h|)$.

Пусть теперь Ω — область в R_n с границей Γ , $H_k^h(\Omega)$ — пространство сужений элементов из H_k^h на Ω .

Теорема 2. Если $\lambda > 0$ вещественное, граница Γ области Ω липшицева, то для любого $u \in H_{\lambda}(\Omega)$ и любого вещественного $\rho \leq \langle \lambda \rangle$ существует такая функция $\tilde{u} \in H_{\langle \lambda \rangle}^h(\Omega)$, что

$$\|u - \tilde{u}\|_{H_{\rho}^h(\Omega)} \leq C_2 |h|^{\lambda - \rho} \|u\|_{H_{\lambda}(\Omega)},$$

где

$$\langle \lambda \rangle = \begin{cases} \lambda - 1, & \text{если } \lambda \text{ целое,} \\ [\lambda], & \text{если } \lambda \text{ нецелое.} \end{cases}$$

2°. Пусть $a(v_1, v_2)$ — непрерывная на $H_m(\Omega) \times H_m(\Omega)$ билинейная форма и существует $\mu_0 > 0$, что при всех $v \in H_m(\Omega)$

$$a(v, v) \geq \mu_0 \|v\|_{H_m(\Omega)}^2.$$

Рассмотрим задачу: найти функцию $u \in H_m(\Omega)$ такую, что

$$a(u, v) = f(v) \quad \text{при всех } v \in H_m(\Omega), \quad (2)$$

где $f \in H_m^*(\Omega)$, $H_m^*(\Omega)$ — сопряженное к $H_m(\Omega)$ пространство, $f(v)$ — значение $f \in H_m^*(\Omega)$ на $v \in H_m(\Omega)$.

Задача типа (2) возникает, например, при нахождении обобщенных решений из $H_m(\Omega)$ краевой задачи для эллиптического уравнения $2m$ -го порядка с естественными однородными граничными условиями.

Будем искать приближенное решение (2) в $H_m^h(\Omega)$ проекционным методом, точнее, пусть $u^h \in H_m^h(\Omega)$ — решение задачи

$$a(u^h, v) = f(v) \quad \text{при всех } v \in H_m^h(\Omega). \quad (3)$$

Теорема 3. Для любого $f \in H_m^*(\Omega)$ задачи (2) и (3) однозначно разрешимы в $H_m(\Omega)$ и $H_m^h(\Omega)$ соответственно и

$$\|u - u^h\|_{H_m(\Omega)} \leq C_3 \omega_m(u^*, C_4 |h|),$$

где u^* — какое-нибудь продолжение u с Ω на R_n .

* *Примечание при корректуре.* Как стало известно автору, подобные операторы восполнения рассматривались в книге (9).

Рассмотрим связанную с (2) задачу: найти такую функцию $w \in H_m(\Omega)$, что

$$a(v, w) = f(v) \quad \text{при всех } v \in H_m(\Omega). \tag{4}$$

Теорема 4. Если задачи (2) и (4) разрешимы в $H_{m+1}(\Omega)$ при любом $f \in H_{m-1}^*(\Omega)$ и для их решений верна априорная оценка типа $\|u\|_{H_{m+1}(\Omega)} \leq C_4 \|f\|_{H_{m-1}^*(\Omega)}$, то при всех действительных $\rho \leq m$

$$\|u - u^h\|_{H_\rho(\Omega)} \leq C_5 |h|^{\gamma_1} \|f\|_{H_{m-1}^*(\Omega)},$$

где

$$\gamma_1 = \gamma_1(\rho) = \begin{cases} 2, & \rho \leq m-1, \\ 1+m-\rho, & m-1 < \rho \leq m, \end{cases}$$

u, u^h — решения (2) и (3) соответственно.

Теорема 5. Если задачи (2) и (4) разрешимы в $H_{m+1}(\Omega)$ при любом $f \in L_2(\Omega)$ и для их решений верны априорные оценки типа $\|u\|_{H_{m+1}(\Omega)} \leq C_6 \|f\|_{L_2(\Omega)}$, то при всех действительных $\rho, 0 \leq \rho \leq m$, справедливо неравенство

$$\|u - u^h\|_{H_\rho(\Omega)} \leq C_7 |h|^{2-\rho} \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где u и u^h — решения (2) и (3) соответственно.

3°. Пусть (2) разрешима в $H_{m+r}(\Omega)$, где $r > 0$, и

$$\|u\|_{H_{m+r}(\Omega)} \leq C_8 \|f\|_{H_{m-r}^*(\Omega)}, \tag{5}$$

а $u^h \in H_{m+r}^h(\Omega)$ — решение задачи

$$a(u^h, v) = f(v) \quad \text{при всех } v \in H_{m+r}^h(\Omega). \tag{6}$$

Теорема 6. Если задачи (2) и (4) разрешимы в $H_{m+r}(\Omega)$ при любых $f \in H_{m-r}^*(\Omega)$ и для их решений справедливы априорные оценки типа (5), то при всех действительных $\rho \leq m$

$$\|u - u^h\|_{H_\rho(\Omega)} \leq C_9 |h|^{\gamma_2} \|f\|_{H_{m-r}^*(\Omega)},$$

где

$$\gamma_2 = \gamma_2(\rho) = \begin{cases} 2r, & \rho \leq m-r \\ r+m-\rho, & m-r < \rho \leq m, \end{cases}$$

u, u^h — решения задач (2) и (6) соответственно.

4°. Пусть $a(v_1, v_2)$ и $b(v_1, v_2)$ — симметричные билинейные непрерывные формы на $H_m(\Omega) \times H_m(\Omega)$ и $H_l(\Omega) \times H_l(\Omega)$ соответственно, $l < m$, и существует такое $\mu_1 > 0$, что при $v \in H_l(\Omega)$ $b(v, v) \geq \mu_1 \|v\|_{H_l(\Omega)}^2$. Число λ_k и функцию $u_k \in H_m(\Omega)$, $u_k \neq 0$, назовем собственным значением и собственной функцией, если при всех $v \in H_m(\Omega)$

$$a(u_k, v) = \lambda_k b(u_k, v). \tag{7}$$

Задача типа (7) соответствует задаче на собственные значения $Lu = \lambda Mu$ с естественными однородными граничными условиями, где L и M — эллиптические операторы порядков $2m$ и $2l$, $M > 0$.

Приближенные значения λ_k^h и $u_k^h \in H_s^h(\Omega)$, $u_k^h \neq 0$ определим из условия

$$a(u_k^h, v) = \lambda_k^h b(u_k^h, v) \quad \text{для всех } v \in H_s^h(\Omega), \tag{8}$$

где $s \geq m$.

Все собственные числа задач (7) и (8) действительны; занумеруем их в порядке возрастания: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$; $\lambda_1^h \leq \lambda_2^h \leq \dots$. Пусть $\lambda_{k-1} < \lambda_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_{k+p-1} < \lambda_{k+p}$, Λ и Λ^h — замкнутые линейные оболочки $\{u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+p-1}\}$ и $\{u_k^h, u_{k+1}^h, \dots, u_{k+p-1}^h\}$ соответственно.

Теорема 7. Если $\Lambda \subset H_\lambda(\Omega)$, $\lambda > m$, и задача (8) решается в $H_{<\lambda>}^h(\Omega)$, то существует такое $h_0 > 0$, что при $|h| < h_0$

$$1) \lambda_k \leq \lambda_k^h \leq \lambda_k + C_{10} |h|^{2(\lambda-m)} \sup_{u \in \Lambda} \|u\|_{H_\lambda(\Omega)}^2,$$

$$2) \forall u \in \Lambda \quad \exists u^h \in \Lambda^h, \text{ что } \|u - u^h\|_{H_l(\Omega)} \leq C_{13} |h|^{\lambda-m} \sup_{\|u\|_{H_l(\Omega)}=1} \|u\|_{H_\lambda(\Omega)}.$$

5°. Восполнения (1) при $k \geq 1$ есть кусочно-полиномиальные функции, являющиеся в каждом элементарном симплексе многочленами степени не выше $n(k-1)+1$, где симплицальное разбиение (7) пространства проведено для исходной сетки при нечетных k и для сетки, сдвинутой на вектор

$$\frac{1}{2} \sum_{v=1}^n h_v e_v, \text{ при четных } k. \text{ При } k \geq 1 \text{ носитель функции } \varphi_\alpha^{(k)}(x) \text{ состоит из } n!((k+1)^n - 2^n + n + 1) \text{ элементарных симплексов.}$$

Аналоги полилинейных восполнений, рассматривавшиеся в (1, 2) и др., в наших обозначениях могут быть определены так: $\tilde{q}_h^h u^h = r^h q_0^h u^h$; они являются кусочно-полиномиальными функциями степени kn , а носитель базисной функции, отвечающей этому восполнению, состоит из $n!(k+1)^n$ элементарных симплексов. Менее широкий носитель базисных функций, построенных в этой работе, обеспечивает большую близость п.р.о. к обычным разностным операторам, чем в случае построения п.р.о. на основе восполнения $\tilde{q}_h^h u^h$.

Так, при $n=2$ проекционные аналоги оператора D_1^4 есть $\nabla_1^4 \equiv ({}^{2/3}E + {}^{1/6}(I_2 + I_{-2}))\bar{\partial}_1^2 \partial_1^2$ при использовании восполнений $q_2^h u^h$ и $\tilde{\nabla}_1^4 \equiv ({}^{11/20}E - {}^{13/60}(I_2 + I_{-2}) + {}^{1/120}(I_2^2 + I_{-2}^2))\bar{\partial}_1^2 \partial_1^2$ для восполнений $\tilde{q}_2^h u^h$, где $E u_\alpha^h \equiv u_\alpha^h$, $I_\pm u_\alpha^h \equiv u^h(\alpha \pm h e_k)$, $\partial_k \equiv h_k^{-1}(I_k - E)$, $\bar{\partial}_k \equiv h_k^{-1}(E - I_{-k})$, $k=1, 2$.

Операторы $\nabla_1^4 + \nabla_2^4$ и $\tilde{\nabla}_1^4 + \tilde{\nabla}_2^4$ эквивалентны по спектру (3) оператору $\bar{\partial}_1^2 \partial_1^2 + \bar{\partial}_2^2 \partial_2^2$ с константами эквивалентности ${}^{2/3}$, 1 и ${}^{13/30}$, 1 соответственно. Поэтому, если симметричный дифференциальный оператор L сходен

(8) с оператором $B \equiv \sum_{v=1}^2 D_v^4$ с константами δ_0, δ_1 , то его проекционно-

разностный аналог $\hat{L}$ эквивалентен по спектру оператору $B^h \equiv \sum_{v=1}^2 \bar{\partial}_v^2 \partial_v^2$

с константами эквивалентности ${}^{2/3}\delta_0, \delta_1$, если $\hat{L}$ строится с помощью восполнений $q_2^h u^h$, и с константами ${}^{13/30}\delta_0, \delta_1$ при построении $\hat{L}$ на основе восполнений $\tilde{q}_2^h u^h$. Здесь считается, что разностные операторы действуют на функции, продолженные на всю сетку R_n^h финитным образом.

В заключение выражаю благодарность Е. Г. Дьяконову за внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J.-P. Aubin, Bull. Soc. Math. France, 12 (1967). ² Ю. К. Демьянович, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, № 1, 79 (1968). ³ Е. Г. Дьяконов, Разностные методы решения краевых задач, в. 4, М., 1971. ⁴ Е. Г. Дьяконов, ДАН, 198, № 5, 1007 (1971). ⁵ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. ⁶ Л. Н. Слободецкий, ДАН, 118, № 2, 243 (1958). ⁷ Н. А. Стрелков, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 11, № 4, 969 (1971). ⁸ С. Г. Михлин, Численная реализация вариационных методов, М., 1966. ⁹ J.-P. Aubin, Approximation of elliptic boundary-value problems, New York — London — Sydney — Toronto, 1972.