Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 3

УДК 517.512.2 *МАТЕМАТИКА*

С. Б. ТОПУРИЯ

СУММИРОВАНИЕ МЕТОДОМ АБЕЛЯ ПРОДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО РЯДА ФУРЬЕ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 12 VI 1972)

В настоящей заметке излагаются теоремы, являющиеся аналогами теоремы Фату ([1]) для двойных тригонометрических рядов Фурье, а также устанавливается ряд особенностей продифференцированных двойных тригонометрических рядов. Строятся примеры кратных рядов Фурье, для которых теорема Фату не имеет места в ее обычной формулировке.

Для изложения полученных результатов примем следующие обозначения: $R=(-\pi\leqslant x\leqslant\pi;\ -\pi\leqslant y\leqslant\pi)$; $\sigma[f]$ — ряд Фурье функции $f(x)\in\in L(-\pi,\pi)$, а $\sigma'[f]$ — ряд, полученный почленным дифференцированием ряда $\sigma[f]$; $f(r,x)$, $0<r<1$,— среднее Абеля ряда $\sigma[f]$; $f(r,\rho,x,y)$, $0<r$, $\rho<1$,— среднее Абеля двойного ряда Фурье $\sigma[f]$;

$$\Delta_t^{(1)}(f;\,x)=\frac{f(x+t)-f(x-t)}{2t};$$

$$\psi(f;\,x,\,y,\,t,\,\tau)=\frac{f(x+t,\,y+\tau)-f(x,\,y+\tau)-f(x+t,\,y)+f(x,\,y)}{t\tau};$$

$$g(f;\,x,\,y,\,t,\,\tau)=\frac{f(x+t,\,y+\tau)-f(x-t,\,y+\tau)-f(x+t,\,y-\tau)+f(x-t,\,y-\tau)}{4t\tau};$$

$$\chi(f;\,x,\,t,\,\tau)=\frac{f(t,\,\tau)-f(x,\,\tau)}{t-x};\qquad \Delta_t^{(2)}(f;\,x)=\frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t^2}.$$

Символ $(r,\rho)_\lambda\to1$ означает, что $r\to1$, $\rho\to1$ и $1/\lambda\leqslant(1-r)/(1-\rho)\leqslant\leqslant\lambda$, $\lambda\geqslant1$; $re^{ix}\xrightarrow{\Lambda}e^{ix_0}$ означает, что точка $M(r,\,x)$ стремится к $P(1,\,x_0)$ по некасательным к окружности путям.

Далее, будем рассматривать следующие производные от функции двух переменных:

$$\widetilde{D}_1f(x_0)=\lim_{\substack{t\to0\\x\to x_0}}\Delta_t^{(1)}(f;\,x);\qquad \widetilde{D}_2f(x_0)=\lim_{\substack{t\to0\\x\to x_0}}\Delta_t^{(2)}(f;\,x);$$

$$Df(x,\,y)=\lim_{t,\,\tau\to0}\psi(f;\,x,\,y,\,t,\,\tau);\qquad D^*f(x,\,y)=\lim_{t,\,\tau\to0}g(f;\,x,\,y,\,t,\,\tau);$$

$$D_xf(x_0,\,y_0)=\lim_{\substack{t\to x_0\\\tau\to y_0}}\chi(f;\,x_0,\,t,\,\tau);\qquad D_2f(x)=\lim_{t\to0}\Delta_t^{(2)}(f;\,x).$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Существует такая функция $f(x)$, что $D_2f(x_0)$ существует и конечна, однако*

$$\lim_{re^{ix}\xrightarrow{\Lambda}e^{ix_0}}\frac{\partial^2f(r,\,x)}{\partial x^2}$$

не существует.

Теорема 2. *Если $\widetilde{D}_1 f(x_0)$ существует и конечна, то*

$$\frac{\partial f(r, x)}{\partial x} \to \widetilde{D}_1 f(x_0),$$

как бы точка re^{ix} ни стремилась к e^{ix_0}, оставаясь внутри единичного круга.

Теорема 3. *Если $\widetilde{D}_2 f(x_0)$ существует и конечна, то*

$$\frac{\partial^2 f(r, x)}{\partial x^2} \to \widetilde{D}_2 f(x_0),$$

как бы точка re^{ix} ни стремилась к e^{xi_0}, оставаясь внутри единичного круга.

Теорема 4. *Какими бы хорошими свойствами ни обладала функция $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0), пределы*

$$\lim_{(r,\,\rho)_\lambda \to 1} \frac{\partial f(r, \rho, x_0, y_0)}{\partial x}, \qquad \lim_{(r,\,\rho)_\lambda \to 1} \frac{\partial^2 f(r, \rho, x_0, y_0)}{\partial x\, \partial y},$$

вообще говоря, не существуют ни для какого $\lambda > 1$.

Теорема 5. а) *Пусть $Df(x_0, y_0)$ существует и конечна. Если*

$$\sup_{\substack{0 < \gamma \leqslant 2\pi/2^i \\ 0 < \delta \leqslant 2\pi/2^j}} \frac{1}{\gamma \delta 2^{\sigma(i+j)}} \int_{-\gamma\cdot 2^i}^{\gamma 2^i} \int_{-\delta\cdot 2^j}^{\delta 2^j} |\psi(f; x_0, y_0, t, \tau)|\, dt\, d\tau = O(1) \qquad (1)$$

для $\forall \sigma > 1$, то ряд $\dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \sigma[f]$ суммируем A^* к $Df(x_0, y_0)$, т. е.

$$\lim_{\substack{re^{ix} \xrightarrow{\vee} e^{ix_0} \\ \rho e^{iy} \xrightarrow{\vee} e^{iy_0}}} \frac{\partial^2 f(r, \rho, x, y)}{\partial x\, \partial y} = Df(x_0, y_0).$$

б) *Пусть $(x_0, y_0) \in R$, $\delta = \min(\pi - x_0, \pi + x_0, \pi + y_0)$. Существует такая функция $f(x, y)$, которая бесконечное число раз дифференцируема в области $(-\pi, x_0 + \delta;\ -\pi, y_0 + \delta)$ и $\psi(f; x_0, t, \tau) \in L$, однако ни в одной точке $(x, y) \in \{(x_0, y);\ y \in (-\pi, \pi)\} \cup \{(x, y_0);\ x \in (-\pi, \pi)\}$*

$$\lim_{(r,\,\rho)_\lambda \to 1} \frac{\partial^2 f(r, \rho, x, y)}{\partial x\, \partial y}$$

не существует ни для какого $\lambda > 1$.

Из теоремы 5 можно получить ряд следствий. Приведем наиболее характерные из них.

Следствие 1. *Пусть $Df(x_0, y_0)$ существует и конечна. Если (1) выполняется для $1/\lambda \leqslant \gamma/\delta \leqslant \lambda$, $\lambda \geqslant 1$, то ряд $\dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \sigma[f]$ суммируем A_h^* к $Df(x_0, y_0)$, т. е.*

$$\lim_{\substack{re^{ix} \xrightarrow{\wedge} e^{ix_0} \\ \rho e^{iy} \xrightarrow{\wedge} e^{iy_0} \\ \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1-r}{1-\rho} \leqslant \lambda}} \frac{\partial^2 f(r, \rho, x, y)}{\partial x\, \partial y} = Df(x_0, y_0).$$

В силу теоремы Варда ([2]; ([3]), стр. 212), из теоремы 5 получается

Следствие 2. *Пусть при всех $(x, y) \in R$*

$$|\psi(f; x, y, t, \tau)| \leqslant \varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ почти всюду конечна.

Тогда ряд $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\sigma[f[$ *суммируем* A^* *к* $Df(x, y)$ *почти во всех точках* R.

Определение. Точку (x, y) назовем D-точкой функции $f(t, \tau)$, если в этой точке выполняются условия

$$\lim_{t,\,\tau\to 0}\frac{1}{t\tau}\int_x^{x+t}\int_y^{y+\tau} f(u, v)\,du\,dv = f(x, y),$$

$$\operatorname{Sup}_{|t|>0}\frac{1}{t}\int_x^{x+t}\int_{-\pi}^{\pi} |f(u, v)|\,du\,dv = M_1(x) < \infty,$$

$$\operatorname{Sup}_{|\tau|>0}\frac{1}{\tau}\int_{-\pi}^{\pi}\int_y^{y+\tau} |f(u, v)|\,du\,dv = M_2(y) < \infty.$$

Легко показать, что если $f(t, \tau)\in L\ln^+ L$, то почти все точки (x, y) сегмента R являются D-точками функции $f(t, \tau)$.

Следствие 3. *Если* (x_0, y_0) *является* D-*точкой функции* $f(x, y)$, *то*

$$\lim_{\substack{re^{ix}\overset{\wedge}{\longrightarrow} e^{ix_0}\\ \rho e^{iy}\overset{\wedge}{\longrightarrow} e^{iy_0}}} f(r, \rho, x, y) = f(x_0, y_0).$$

Теорема 6. *Пусть* $D^*f(x_0, y_0)$ *существует и конечна. Если*

$$\operatorname{Sup}_{\substack{0<\gamma\leqslant 2\pi/2^i\\ 0<\delta\leqslant 2\pi/2^j}}\frac{1}{\gamma\delta\cdot 2^{\sigma(i+j)}}\int_{-\gamma\cdot 2^i}^{\gamma\cdot 2^i}\int_{-\delta\cdot 2^j}^{\delta\cdot 2^j} |g(f;\ x_0, y_0, t, \tau)|\,dt\,d\tau = O(1)$$

для $\forall\sigma > 1$, *то в точке* (x_0, y_0) *ряд* $\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\sigma[f]$ *суммируем* A *к* $D^*f(x_0, y_0)$, *т. е.*

$$\lim_{r,\,\rho\to 1}\frac{\partial^2 f(r, \rho, x_0, y_0)}{\partial x\,\partial y} = D^*f(x_0, y_0).$$

Теорема 7. *Пусть* $D_x f(x_0, y_0)$ *существует и конечна. Если*

$$\operatorname{Sup}_{\substack{0<\gamma\leqslant 2\pi/2^i\\ 0<\delta\leqslant 2\pi/2^i}}\frac{1}{\gamma\delta\cdot 2^{\sigma(i+j)}}\int_{-\gamma\cdot 2^i}^{\gamma\cdot 2^i}\int_{-\delta\cdot 2^j}^{\delta\cdot 2^j} |\chi(f;\ x_0, t, \tau)|\,dt\,d\tau = O(1) \tag{2}$$

для $\forall\sigma > 1$, *то ряд* $\frac{\partial}{\partial x}\sigma[f]$ *суммируем* A^* *к* $D_x f(x_0, y_0)$.

Теорема 8. а) *Пусть*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x, y) - f(x_0, y)}{x - x_0} = \frac{\partial f(x_0, y)}{\partial x}$$

равномерно относительно y *в некоторой окрестности точки* y_0, $\frac{\partial f(x_0, y)}{\partial x}\in L\ (-\pi, \pi)$ *и* y_0 *является точкой Лебега функции* $\frac{\partial f(x_0, y)}{\partial x}$. *Если, кроме того, выполняется условие* (2), *то ряд* $\frac{\partial}{\partial x}\sigma[f]$ *суммируем* A^* *к* $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$.

б) *Пусть* $(x_0, y_0)\in R$, $\delta = \min(\pi - y_0, \pi + y_0)$. *Существует такая функция* $f(x, y)$, *которая бесконечное число раз дифференцируема в области*

$(-\pi, \pi; -\pi, y_0+\delta)$ *и* $\chi(f; x_0, x, y) \in L$, *однако ни в одной точке* (x_0, y), $-\pi < y < \pi$, *предел*

$$\lim_{(r,\rho)_\lambda \to 1} \frac{\partial f(r, \rho, x_0, y)}{\partial x} \tag{3}$$

не существует ни для какого $\lambda > 1$.

в) *Пусть* $(x_0, y_0) \in R$. *Существует такая функция* $f(x, y)$ *которая бесконечное число раз дифференцируема в области* $(-\pi, \pi; -\pi, y_0+\delta)$ *и*

$$\frac{\left| f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \right|}{|x - x_0| + |y - y_0|} \leqslant M = \mathrm{const},$$

однако ни в одной точке (x_0, y), $-\pi < y < \pi$, *предел* (3) *не существует ни для какого* $\lambda > 1$.

Можно привести и другие утверждения, относящиеся к этому же кругу идей (см. ([4]), стр. 567), но здесь мы на этом останавливаться не будем.

Все приведенные выше теоремы легко обобщить на случай n-кратных рядов Фурье.

Грузинский политехнический институт
им. В. И. Ленина
Тбилиси

Поступило
8 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Fatou, Acta Math., **30**, 335 (1906). [2] A. J. Ward, Fund. Math., **28**, 265 (1937). [3] С. Сакс, Теория интеграла, М., 1949. [4] С. Б. Топурия, ДАН, **195**, № 3, 567 (1970).