

А. А. ЦЫГАНКОВ

О ПОСТРОЕНИИ ФУНКЦИЙ, ОТОБРАЖАЮЩИХ КОНФОРМНО ЖОРДАНОВУ ОБЛАСТЬ НА ЕДИНИЧНЫЙ КРУГ

(Представлено академиком И. Н. Векун 6 VI 1972)

Пусть замкнутая спрямляемая жорданова кривая Γ задана уравнением $z = z(s)$, $z = x + iy$, s — натуральный параметр.

Пусть, далее, функция $w = \varphi(\xi)$ отображает конформно и однолистно внутренность кривой Γ , область G , на единичный круг при условиях нормировки: $\varphi(\xi_0) = 0$, $\varphi'(\xi_0) = \gamma > 0$, $\xi_0 \in G$, а $\xi = \psi(w)$ — обратная функция.

Рассмотрим три системы ортонормированных на Γ гармонических многочленов (с.о.г.м.):

с.о.г.м. ⁽⁴⁾

$$\{\alpha_{1,0}, \alpha_{1,n}(z), \beta_{1,n}(z)\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

индуцирована на Γ единичной весовой функцией;

с.о.г.м.

$$\{\alpha_{2,0}, \alpha_{2,n}(z), \beta_{2,n}(z)\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

индуцирована на Γ весовой функцией $n_2(z) = \sqrt{|\varphi'(z)|}$;

с.у.г.м. ⁽⁴⁾

$$\{\alpha_0, \alpha_n(z), \beta_n(z)\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

индуцирована на Γ весовой функцией $n(z)$.

Функциям $f_1(z) = |\varphi'(z)|$ и $f_2(z) = \sqrt{|\varphi'(z)|}$ поставим в соответствие ряды Фурье

$$f_1(z) \sim a_{1,0} \cdot \alpha_{1,0} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_{1,k} \cdot \alpha_{1,k}(z) + b_{1,k} \cdot \beta_{1,k}(z)], \quad (4)$$

где

$$a_{1,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\varphi'(z)| \alpha_{1,k}(z) ds, \quad b_{1,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\varphi'(z)| \beta_{1,k}(z) ds,$$

$$f_2(z) \sim a_{2,0} \cdot \alpha_{2,0} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_{2,k} \cdot \alpha_{2,k}(z) + b_{2,k} \cdot \beta_{2,k}(z)], \quad (5)$$

где

$$a_{2,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \sqrt{|\varphi'(z)|} \sqrt{|\varphi'(z)|} \alpha_{2,k}(z) ds,$$

$$b_{2,k} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \sqrt{|\varphi'(z)|} \sqrt{|\varphi'(z)|} \beta_{2,k}(z) ds.$$

Л е м м а. Если функция $p(\xi)$ является гармонической в области G и непрерывной в замкнутой области G , то для нее имеет место равенство

$$p(\psi(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\varphi'(z)| p(z) ds.$$

Эта лемма легко доказывается с помощью теоремы о среднем для гармонических функций.

Далее будем рассматривать области G , для которых отображающая функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\varphi'(z)|^2 ds < \infty. \quad (6)$$

Теорема 1. *Ряды (4) и (5) сходятся равномерно в области G , т. е. на всяком замкнутом множестве $F \subset G$, и сходятся почти всюду на кривой Γ .*
Действительно, в силу леммы, ряды (4) и (5) имеют вид соответственно

$$K_1(z, \zeta_0) = \alpha_{1,0}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_{1,k}(\zeta_0) \alpha_{1,k}(z) + \beta_{1,k}(\zeta_0) \beta_{1,k}(z)], \quad (7)$$

$$K_2(z, \zeta_0) = \alpha_{2,0}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_{2,k}(\zeta_0) \alpha_{2,k}(z) + \beta_{2,k}(\zeta_0) \beta_{2,k}(z)], \quad (8)$$

где $\zeta_0 \in \varphi(0) \in G$.

Осталось обратиться к доказанным нами теоремам 3.1 и 3.2 из (4).

Теорема 2. *Для с.у.г.м. (3), индуцированной на кривой Γ весом $n(z) = |\varphi'(z)|$, существует точка $\zeta_0 \in G$ такая, что*

$$\alpha_k(\zeta_0) = 0, \quad \beta_k(\zeta_0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

причем $\zeta_0 = \varphi(0)$.

Теперь приступим непосредственно к построению функции $\varphi(\zeta)$.

Для $\varphi(\zeta)$ имеет место формула (1)

$$\varphi(\zeta) = e^{i\alpha} (\zeta - \zeta_0) e^{u(\zeta) + iv(\zeta)}, \quad (9)$$

где $u(\zeta) = \ln \left| \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} \right|$, $v(\zeta)$ — функция, сопряженная $u(\zeta)$, и $u(z) = -\ln \frac{1}{|z - \zeta_0|}$, $z \in \Gamma$.

Пусть

$$\ln \left| \frac{1}{z - \zeta_0} \right| \infty a_0 \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \alpha_k(z) + b_k \beta_k(z)], \quad (10)$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} n(z) \ln \left| \frac{1}{z - \zeta_0} \right| \alpha_k(z) ds, \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} n(z) \ln \left| \frac{1}{z - \zeta_0} \right| \beta_k(z) ds.$$

Нам потребуются далее величина $E_n^*(f, \Gamma)_c$ и классы кривых $C(p, \alpha)$ которые описаны, например, в работах (4, 3).

Из доказанной нами теоремы 3.7 из (4) следует, что на всякой кривой $\Gamma \in C(2, \alpha)$, $\alpha > 1/2$ при $n(z) = |\varphi'(z)|$ ряд (10) равномерно сходится в области $\bar{G}$ к функции $\ln \left| \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \zeta_0} \right|$, $\zeta \in \bar{G}$.

А поскольку система (3) в рассматриваемом случае (т. е. при $n(z) = |\varphi'(z)|$) является с.у.г.м. и функция $v(\zeta)$ сопряжена $u(\zeta)$, то, как следует из теоремы 3.3 из (3), на всякой кривой $\Gamma \in C(2, \alpha)$, $\alpha > 1/2$, равномерно в замкнутой области $\bar{G}$ справедливо равенство

$$v(\zeta) = -b_0 \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [-b_k \alpha_k(\zeta) + a_k \beta_k(\zeta)], \quad \zeta \in \bar{G}. \quad (11)$$

Учитывая теперь оценки (3.25) из (4) и (3.20) из (3), убеждаемся, что справедлива

Теорема 3. Если $\Gamma \in C(2, \alpha)$, $\alpha > 1/2$, то для функции $\varphi(\xi)$, осуществляющей конформное и однолистное отображение области G , ограниченной контуром Γ , на единичный круг, имеет место представление

$$\varphi(\xi) = e^{i\alpha} \cdot (\xi - \xi_0) \exp \left(a_0 \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - ib_k) [\alpha_k(\xi) + i\beta_k(\xi)] \right), \quad \xi \in \bar{G}, \quad (12)$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\varphi'(z)| \ln \left| \frac{1}{z - \xi_0} \right| \cdot \alpha_k(z) ds, \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |\varphi'(z)| \ln \left| \frac{1}{z - \xi_0} \right| \cdot \beta_k(z) ds,$$

а параметр α определяется условием нормировки функции $\varphi(\xi)$, причем справедлива оценка

$$\left| \varphi(\xi) - e^{i\alpha} \cdot (\xi - \xi_0) \exp \left(a_0 \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k) [\alpha_k(\xi) + i\beta_k(\xi)] \right) \right| \leq \\ \leq C \cdot E_n^* \left(\ln \left| \frac{1}{z - \xi_0} \right|, \Gamma \right)_C \cdot \ln n, \quad (13)$$

где C — константа, не зависящая от n .

Кроме того, опираясь на теорему 3.4 из (3), можно убедиться, что имеет место

Теорема 4. Если $\Gamma \in C(1, \alpha)$, то для функции $\varphi(\xi)$, осуществляющей конформное и однолистное отображение области G , ограниченной контуром Γ , на единичный круг, имеет место представление (12), равномерное в замкнутой области $\bar{G}$.

Формула (12) может вызвать неудовлетворение, поскольку искомая функция $\varphi(\xi)$ выражается с помощью ряда по многочленам с.у.г.м., индуцированной на Γ весовой функцией $n(z) = |\varphi'(z)|$, $z \in \Gamma$. По этому поводу можно сказать следующее:

1) Задачи нахождения функций $w = \varphi(\xi)$, $\xi \in \bar{G}$, и $\omega = |\varphi'(z)|$, $z \in \Gamma$, суть неэквивалентные.

2) Нахождение функции $\omega = |\varphi'(z)|$, $z \in \Gamma$, есть относительно простая задача для широкого класса областей (например, для G : $\Gamma \in C(1, \alpha)$).

3) Поскольку гладкостные свойства контура Γ определяют гладкостные свойства отображающей функции $\varphi(\xi)$, $\xi \in \bar{G}$, (2), то, не зная самой функции $\omega = |\varphi'(z)|$, $z \in \Gamma$, можно судить о ее свойствах. И как только функция $\omega = |\varphi'(z)|$, $z \in \Gamma$, удовлетворяет условию (6), для нее имеет место выражение $\omega = |\varphi'(z)| = K_1(z, \xi_0)$.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
Свердловск

Поступило
24 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, М., 1958. ² И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. ³ П. К. Суеitin, УМН, 24, № 2 (128), 41 (1966). ⁴ А. А. Цыганков, Многочлены от двух переменных, ортогональные на плоской кривой. Кандидатская диссертация, Калинин, 1971.