Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 3

УДК 517.919 *МАТЕМАТИКА*

М. А. ШИШКОВА

РАССМОТРЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 6 VI 1972)

В работе кратко излагаются результаты, полученные мною под руководством акад. Л. С. Понтрягина.

Пусть

$$\varepsilon\dot{x} = f(x, y), \tag{1}$$

$$\dot{y} = g(x, y) \tag{2}$$

— система дифференциальных уравнений, где x и y — векторные функции независимого переменного t, а ε — малый положительный параметр.

Такие системы рассматривались в работах Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко ([1], [2]). Их подход следующий: видно, что x меняется быстро по сравнению с y, и потому естественно рассмотреть сперва систему (1) (быструю) при фиксированном $y = y_0$. Через короткое время решение этой системы с начальным значением x_0 приблизится к стабильному решению, например к устойчивому положению равновесия или устойчивому предельному циклу. В то время как при соответствующем медленном изменении y стабильное решение будет перемещаться в пространстве быстрых движений, наше решение будет оставаться вблизи него, пока устойчивость стабильного решения не нарушится. При этом нарушении требуется специальное тонкое исследование дальнейшего поведения решения.

Здесь рассматривается случай, когда пространство быстрых решений есть плоскость и в ней при начальном значении y_0 имеется неустойчивый предельный цикл, причем вся часть плоскости, содержащаяся внутри этого предельного цикла, является областью притяжения устойчивого грубого фокуса. Очевидно, что решение $x(t)$, $y(t)$ системы (1), (2) при начальном значении x_0, y_0, где x_0 лежит внутри предельного цикла, обладает тем свойством, что точка $x(t)$ быстро приближается к фокусу на расстояние порядка ε. Предполагается, что при соответствующем медленном изменении $y = y(t)$ предельный цикл стягивается к фокусу, который становится неустойчивым сложным кратности 1, а затем неустойчивым грубым фокусом. Оказывается, вопреки естественному ожиданию, что после этого перехода точка $x(t)$ не уходит быстро от неустойчивого фокуса, а остается вблизи него еще конечное время.

Мы рассмотрим конкретную систему дифференциальных уравнений, в которой реализуется описанное явление. Система эта, хотя и вполне определенная, достаточно типична, чтобы думать, что и в общем случае процесс идет тем же способом. Она имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{x}^1 &= [y + \gamma[(x^1 - y)^2 + (x^2)^2]](x^1 - y) - x^2,\\ \varepsilon\dot{x}^2 &= (x^1 - y) + [y + \gamma[(x^1 - y)^2 + (x^2)^2]]x^2,\end{aligned} \tag{3}$$

$$\dot{y} = 1, \tag{4}$$

где γ — постоянное число.

Если $\gamma > 0$, то быстрая система (3) имеет при $y < 0$ неустойчивый предельный цикл и внутри него устойчивый фокус, при $y = 0$ происходит слияние, при $y > 0$ система (3) имеет неустойчивый фокус. Если $\gamma > 0$, то быстрая система (3) при $y < 0$ имеет устойчивый фокус, при $y = 0$ происходит рождение устойчивого предельного цикла, так что при $y > 0$ неустойчивый фокус лежит внутри устойчивого предельного цикла. В обоих случаях при изменении y фокус движется в плоскости быстрых движений вдоль оси абсцисс, именно, он находится в точке $x^1 = y$, $x^2 = 0$. Оказывается, что если процесс начинается при $y_0 < -1$, то точка $x(t)$ остается вблизи движущегося фокуса до того момента, когда $y = 1$, и только затем быстро уходит от фокуса.

Для рассмотрения системы (3), (4) мы введем новые переменные $\xi^1 = x^1 - y$, $\xi^2 = x^2$ и решим уравнение (4) в виде $y = t$. После этого вместо системы (3), (4) мы получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{\xi}^1 &= [t + \gamma[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]]\xi^1 - \xi^2 - \varepsilon, \\ \varepsilon\dot{\xi}^2 &= \xi^1 + [t + \gamma[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2]]\xi^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Пусть $\xi(t) = (\xi^1(t), \xi^2(t))$ — решение этой системы, удовлетворяющее начальному условию: $|\xi(-1)| = O(\varepsilon)$. Оказывается, что для него выполнены следующие условия:

$$|\xi(t)| = O(\varepsilon) \quad \text{при} \quad -1 \leqslant t \leqslant 1 - \varepsilon^{5/12}; \tag{6}$$

$$|\xi(t)| = O(\sqrt{\varepsilon}) \quad \text{при } 1 - \varepsilon^{5/12} \leqslant t \leqslant 1; \tag{7}$$

$$|\xi(1 + {}^1/_2\varepsilon|\ln\varepsilon|)| > c^* > 0. \tag{8}$$

Таким образом, решение $\xi(t)$ на всем отрезке $-1 \leqslant t \leqslant 1$ остается близким к нулю, а после $t = 1$ быстро отходит на конечное расстояние от нуля.

Для доказательства этого основного результата мы выйдем в область комплексных значений переменного t и введем новые неизвестные функции, положив

$$u^1 = \xi^1 + i\xi^2, \quad u^2 = \xi^1 - i\xi^2. \tag{9}$$

Тогда система (5) записывается в виде

$$\dot{u}^1 = \frac{t+i}{\varepsilon}u^1 + \frac{\gamma}{\varepsilon}(u^1)^2 u^2 - 1, \quad \dot{u}^2 = \frac{t-i}{\varepsilon}u^2 + \frac{\gamma}{\varepsilon}u^1(u^2)^2 - 1. \tag{10}$$

Перейдем от этих дифференциальных уравнений к интегральным, решив каждое из них как линейное уравнение относительно u^1, соответственно u^2, с начальными условиями $u^1(-1) = \hat{u}_0^1$, $u^2(-1) = \hat{u}_0^2$.

Тогда получим

$$\begin{aligned} u^1(t) = \hat{u}_0^1 \exp\left\{\frac{(t+i)^2}{2\varepsilon} - \frac{(i-1)^2}{2\varepsilon}\right\} - \int_{-1}^{t} \exp\left\{\frac{(t+i)^2}{2\varepsilon} - \frac{(\tau+i)^2}{2\varepsilon}\right\} d\tau + \\ + \frac{\gamma}{\varepsilon}\int_{-1}^{t} \exp\left\{\frac{(t+i)^2}{2\varepsilon} - \frac{(\tau+i)^2}{2\varepsilon}\right\}[u^1(\tau)]^2 u^2(\tau)\, d\tau, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} u^2(t) = \hat{u}_0^2 \exp\left\{\frac{(t-i)^2}{2\varepsilon} - \frac{(i+1)^2}{2\varepsilon}\right\} - \int_{-1}^{t} \exp\left\{\frac{(t-i)^2}{2\varepsilon} - \frac{(\tau-i)^2}{2\varepsilon}\right\} d\tau + \\ + \frac{\gamma}{\varepsilon}\int_{-1}^{t} \exp\left\{\frac{(t-i)^2}{2\varepsilon} - \frac{(\tau-i)^2}{2\varepsilon}\right\} u^1(\tau)[u^2(\tau)]^2\, d\tau. \end{aligned} \tag{12}$$

В интегральных уравнениях (11), (12) переменные t, u^1, u^2 являются комплексными, причем $|u_0^1| = O(\varepsilon)$, $|u_0^2| = O(\varepsilon)$. Эти интегральные уравнения будем решать методом последовательных приближений, положив

$$u_{k+1}^1(t) = \hat{u}_0^1 \exp\left\{\frac{(t+i)^2}{2\varepsilon} - \frac{(i-1)^2}{2\varepsilon}\right\} - \int_{-1}^{t} \exp\left\{\frac{(t+i)^2}{2\varepsilon} - \frac{(\tau+i)^2}{2\varepsilon}\right\} d\tau +$$

$$+ \frac{\gamma}{\varepsilon} \int_{-1}^{t} \exp\left\{\frac{(t+i)^2}{2\varepsilon} - \frac{(\tau+i)^2}{2\varepsilon}\right\} [u_k^1(\tau)]^2 u_k^2(\tau)\, d\tau, \tag{13}$$

$$u_{k+1}^2(t) = \hat{u}_0^2 \exp\left\{\frac{(t-i)^2}{2\varepsilon} - \frac{(i+1)^2}{2\varepsilon}\right\} - \int_{-1}^{t} \exp\left\{\frac{(t-i)^2}{2\varepsilon} - \frac{(\tau-i)^2}{2\varepsilon}\right\} d\tau +$$

$$+ \frac{\gamma}{\varepsilon} \int_{-2}^{t} \exp\left\{\frac{(t-i)^2}{2\varepsilon} - \frac{(\tau-i)^2}{2\varepsilon}\right\} u_k^1(\tau)\, [u_k^2(\tau)]^2\, d\tau \tag{14}$$

и считая, что нулевое приближение $u_0^1(t) = u_0^2(t) \equiv 0$. При доказательстве сходимости метода будем выбирать пути интегрирования в плоскости комплексного переменного t так, чтобы, беря под интегралами модули соответственных величин, получить достаточно хорошие оценки.

Введем в интегральных соотношениях (13), (14) новые действительную и мнимую оси в плоскости t по-разному для соотношений (13) и (14). Именно положим

для (13):

$$t + i = s_1 + it_1, \quad \tau + i = \sigma_1 + i\tau_1; \tag{15}$$

для (14):

$$t - i = s_2 - it_2, \quad \tau - i = \sigma_2 - i\tau_2; \tag{16}$$

s_1, t_1, σ_1, τ_1, s_2, t_2, σ_2, τ_2 суть действительные переменные. Таким образом, одна и та же точка t имеет две различные пары координат, связанные соотношением

$$s_1 = s_2, \quad t_1 + t_2 = 2. \tag{17}$$

Заменяя в интегральных соотношениях (13) и (14) переменные t и τ по формулам (15), (16), переходя к модулям и считая, что

$$|\hat{u}_0^j| \leqslant \hat{c}\varepsilon, \quad |u_k^j| \leqslant \sqrt{\varepsilon} v_k^j, \quad j = 1, 2, \tag{18}$$

мы для оценок v_{k+1}^1 функций $u_{k+1}^1/\sqrt{\varepsilon}$ получаем интегральное равенство

$$v_{k+1}^1 = \hat{c}\sqrt{\varepsilon} \exp\left\{\frac{s_1^2 - t_1^2}{2\varepsilon}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{l_1^1} \exp\left\{\frac{s_1^2 - t_1^2 - \sigma_1^2 + \tau_1^2}{2\varepsilon}\right\} dl +$$

$$+ \gamma \int_{l^1} \exp\left\{\frac{s_1^2 - t_1^2 - \sigma_1^2 + \tau_1^2}{2\varepsilon}\right\} (v_k^1)^2 v_k^2\, dl. \tag{19}$$

Интегральное равенство для оценок v_{k+1}^2 функций $u_{k+1}^2/\sqrt{\varepsilon}$ в системе координат (16) имеет тот же вид, причем пути интегрирования l_1^2, l^2 описываются в координатах (16) теми же уравнениями, что и пути l_1^1, l^1 в координатах (15).

Будем считать, что начальные оценки v_0^1 и v_0^2 суть тождественные нули, тогда видно, что v_k^1 и v_k^2 связаны соотношением

$$v_k^2(s_1, t_1) = v_k^1(s_1, 2 - t_1). \tag{20}$$

Полагая $v_k^1 = v_k$, $l_1^1 = l_1$, $l^1 = l$, мы приходим к одному интегральному соотношению

$$v_{k+1}(s_1, t_1) = \hat{c}\sqrt{\varepsilon}\exp\left\{\frac{s_1^2 - t_1^2}{2\varepsilon}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int\limits_{l_1}\exp\left\{\frac{s_1^2 - t_1^2 - \sigma_1^2 + \tau_1^2}{2\varepsilon}\right\}dl +$$

$$+\gamma\int\limits_{l}\exp\left\{\frac{s_1^2 - t_1^2 - \sigma_1^2 + \tau_1^2}{2\varepsilon}\right\}[v_k(\sigma_1, \tau_1)]^2\,[v_k(\sigma_1, 2 - \tau_1)]\,dl. \qquad (21)$$

В плоскости переменного t выделим квадрат K с вершинами a, b, c, d в точках $t = -1$, $t = -i$, $t = 1$, $t = i$. Функции v_k мы будем вычислять только на этом квадрате.

В квадрате K введем новые координаты φ, ψ, положив

$$\varphi = t_1 - s_1, \quad \psi = t_1 + s_1. \qquad (22)$$

При этом

$$s_1^2 - t_1^2 = -\varphi\psi. \qquad (23)$$

На квадрате K зададим кусочно-постоянную функцию $\omega(\varphi, \psi)$, описываемую следующими соотношениями: при $0 \leqslant \varphi \leqslant \varepsilon^{5/12}$ или $0 \leqslant \psi \leqslant \varepsilon^{5/12}$ полагаем $\omega(\varphi, \psi) = 1$, при $\varepsilon^{5/12} \leqslant \varphi \leqslant 2 - \varepsilon^{5/12}$ и $\varepsilon^{5/12} \leqslant \psi \leqslant 2 - \varepsilon^{5/12}$ полагаем $\omega(\varphi, \psi) = \varepsilon^{1/12}$, на остальной части квадрата K полагаем $\omega(\varphi, \psi) = \varepsilon^{5/12}$.

Путь интегрирования l_1 выбираем следующим образом: по прямой из точки $t = -1$ в точку $t = -1 - i$, по горизонтальной прямой из точки $t = -1 - i$ в точку $t = \alpha - i$, по прямой из точки $t = \alpha - i$ в точку $t = \alpha + i\beta$, где α и β — действительные числа, причем $\alpha + i\beta \in K$. При таком пути интегрирования получаем для $v_1(\varphi, \psi)$ оценку

$$v_1(\varphi, \psi) \leqslant c\omega(\varphi, \psi), \qquad (24)$$

где c — некоторая положительная константа.

Путь интегрирования l в квадрате K описывается в координатной системе φ, ψ следующим образом: из точки $(2, 0)$ в точку $(\varphi_0, 0)$ по стороне квадрата ab, из точки $(\varphi_0, 0)$ в точку (φ_0, ψ_0) по прямой. При этом пути интегрирования, используя соотношения (20) и (23), получаем оценку

$$\int\limits_{l}\exp\left(\frac{\varphi\psi - \varphi_0\psi_0}{2\varepsilon}\right)\omega^2(\varphi, \psi)\,\omega(2 - \varphi, 2 - \psi)\,dl \leqslant c'\varepsilon^{5/12}\omega(\varphi_0, \psi_0). \qquad (25)$$

Из оценок (24) и (25) непосредственно вытекает основной результат заметки.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Ф. Мищенко, Л. С. Понтрягин, ДАН, **102**, № 5, 889 (1955). [2] Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., **21**, 605 (1957).