Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 5

УДК 517.944 МАТЕМАТИКА

И. А. БИКЧАНТАЕВ

НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 26 VI 1972)

Рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение

$$L(U)=\sum_{k=0}^{2n} a_k \partial^{2n} U(x,y)/\partial x^{2n-k}\partial y^k=0 \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами a_k, при этом $a_{2n}\neq 0$. Обозначим через $s_1, \bar{s}_1, \ldots, s_\nu, \bar{s}_\nu$ различные между собой попарно комплексно сопряженные корни полинома $\sum\limits_{k=0}^{2n} a_k s^k$, а их кратности через $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ соответственно, $\lambda_1+\ldots+\lambda_\nu=n$. Для определенности будем считать, что мнимые части $s_1, \ldots, s_\nu$ положительны. Используя результаты Б. Леви [1], легко показать, что всякое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде

$$U(x,y)=\operatorname{Re}\sum_{q=1}^{\nu}\sum_{j=0}^{\lambda_q-1}\bar{z}_q^j\varphi_{qj}(z_q), \tag{2}$$

где $\varphi_{qj}(z_q)$ — аналитическая функция переменного $z_q=x+s_q y$. Функцию $V(x,y)=\operatorname{Im}\sum\limits_{q=1}^{\nu}\sum\limits_{j=0}^{\lambda_q-1}\bar{z}_q^j\varphi_{qj}(z_q)$, тоже удовлетворяющую уравнению (1), назовем сопряженным с $U(x,y)$ решением и рассмотрим комплексное регулярное решение уравнения (1)

$$F(z)=U+iV=\sum_{q=1}^{\nu}\sum_{j=0}^{\lambda_q-1}\bar{z}_q^j\varphi_{qj}(z_q). \tag{3}$$

Функция $F(z)$, очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\partial^n F(z)/\partial\bar{z}_1^{\lambda_1}\ldots\partial\bar{z}_\nu^{\lambda_\nu}=0, \tag{4}$$

и, наоборот, всякое регулярное решение уравнения (4) имеет вид (3).

Регулярные решения уравнения (4) являются естественным обобщением полианалитических [2] и аналитических функций.

В представлении (3) аналитические функции $\varphi_{qj}(z_q)$ определяются по $F(z)$ не единственным образом. Для единственности этого представления можно потребовать, например, чтобы функции $\varphi_{qj}(z_q)$ обращались в нуль порядка $\lambda_1+\ldots+\lambda_{q-1}$ в некоторой точке. Если область определения D функции $F(z)$ содержит бесконечно удаленную точку и $F(\infty)=0$, то представление (3) будет единственным, если потребовать, чтобы функции $\varphi_{qj}(z_q)$ имели нуль порядка $j+1$ на бесконечности.

В настоящей заметке будем рассматривать краевые задачи следующего вида: в односвязной области D, ограниченной контуром Γ, найти регулярное решение уравнения (4), удовлетворяющее на Г краевым условиям

$$\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{n-1}[a_{jk}(t)-ib_{jk}(t)]\,L_kF(t)=c_j(t),\quad j=0,1,\ldots,n-1; \tag{5}$$

здесь заданные функции $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$, $c_j(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера и $\det\|a_{jk}-ib_{jk}\|\neq 0$; L_k — дифференциальные операторы. Их можно задавать различным образом, например, $\partial^k/\partial y^k$, $\partial^{n-1}/\partial x^{n-k-1}\partial y^k$ и т. д., и таким путем получать различные краевые задачи.

Уравнение (1), а следовательно, и уравнение (4) тесно связаны с уравнениями плоской теории упругости как изотропной ($n=2$, $\nu=1$), так и анизотропной ($n=2$, $\nu=2$) сред. Для эффективного решения плоских задач теории упругости и краевых задач для полигармонических и полианалитических функций для некоторых классов областей применяются такие методы: 1) конформное отображение области D на единичный круг E с помощью рациональной функции ([3-8]); 2) метод характеристической функции ([9-12]); 3) метод симметрии ([13]). Мы применим эти методы к исследованию краевых задач вида (5), приводя их к краевым задачам для аналитических функций, и дадим точную геометрическую характеристику тех областей D, для которых указанные методы применимы.

Метод 1) будет применим в том случае, если существуют функции $\omega_k(\zeta)$, отображающие конформно единичный круг E на области $D_k=\{x+s_ky,\ (x,y)\in D\}$, $k=1,\ldots,\nu$, причем аффинно соответствующим точкам границ областей D_k соответствует одна точка на единичной окружности C. О существовании таких функций для некоторых областей говорит

Теорема 1. *Для существования указанных функций $\omega_k(\zeta)$ достаточно, а при $\nu>1$ и необходимо, чтобы область D была одного из следующих видов:* 1) *внешность эллипса (отрезка),* 2) *внешность параболы,* 3) *полуплоскость,* 4) *плоскость с разрезом по лучу,* 5) *плоскость с разрезом по двум лучам, расположенным на одной прямой. Функции $\omega_k(\zeta)=\frac{1}{2}(1-is_k)\,\omega(\zeta)+\frac{1}{2}(1+is_k)\,\bar\omega(1/\zeta)$ осуществляют конформное отображение единичного круга на области D_k, где в соответствующих случаях $\omega(\zeta)$ имеют вид:* 1) $\alpha/\zeta+\beta+\gamma\zeta$, $|\alpha|>|\gamma|$ *(если D — внешность отрезка, то $|\alpha|=|\gamma|$);* 2) $\alpha(\zeta-1)^{-2}+\beta$; 3) $\alpha/(\zeta-1)+\beta$; 4) $\alpha\zeta(\zeta-1)^{-2}+\beta$; 5) $\alpha\zeta/(\zeta^2-1)+\beta$, *где α, β, γ — комплексные постоянные.*

Будем говорить, что перечисленные области принадлежат классу A.

Для приведения краевых задач вида (5) к краевым задачам для аналитических функций остается ввести функции $\Phi_k(\zeta)=\{L_kF(z)\}_{z_q=\omega_q(\zeta),\bar z_q=\bar\omega_q(1/\zeta)}$, которые в соответствующих точках единичной окружности совпадают с $L_kF(t)$ и являются аналитическими всюду, кроме полюса $\zeta=0$.

В случае метода 2) (характеристической функции) берем односвязную область D, ограниченную аналитическим контуром

$$f(x,y)=0. \tag{6}$$

Уравнение

$$f\left(\frac{z+w}{2},\ \frac{z-w}{2i}\right)=0 \tag{7}$$

определяет в окрестности контура Г аналитическую по z функцию $w(z)$, которая называется характеристической функцией контура Г. Если $w(z)$ мероморфна в D, то для сведения задач вида (5) к краевым задачам для аналитических функций (при $\nu=1$) вводятся аналитические (кроме конечного числа полюсов) функции $\Phi_k(z)=\{L_kF(z)\}_{\bar z=w}$. Здесь, однако, возникает естественный вопрос: насколько широк класс таких областей? На этот вопрос отвечает

Теорема 2. *Для того чтобы характеристическая функция контура была мероморфна в области D, необходимо и достаточно, чтобы область D отображалась на круг рациональной функцией.*

При $\nu = 1$ этот метод применялся в работах [9–12]. Мы применяем его при $\nu > 1$. Для этого, используя представление (3), вычисляем $L_k F(z)$ и вводим аналитические (кроме конечного числа полюсов) функции $\Phi_k(z) = \{L_k F(z)\}_{z_q = \upsilon_q(z), \bar{z}_q = \bar{\upsilon}_q(z)}$, где $\upsilon_q(z) = [(1 - is_q)z + (1 + is_q)w]/2$, $\bar{\upsilon}_q(z) = [(1 - i\bar{s}_q)z + (1 + i\bar{s}_q)w]/2$. Кроме того, функция $\upsilon_q(z)$ должна отображать область D на D_q. Легко видеть, что метод характеристической функции (при $\nu > 1$) применим в том и только в том случае, когда область D принадлежит классу A.

Рассмотренные методы приводят задачи вида (5) к краевым задачам Гильберта для нескольких неизвестных функций, которые затем могут быть решены методом симметрии [14, 15]. Метод симметрии [13] позволяет привести задачи вида (5) сразу к задачам Римана для системы функций. Пусть D — односвязная область, ограниченная алгебраическим контуром Γ, заданным уравнением (6). Предположим, что риманова поверхность D_z функции $w(z)$, определяемой уравнением (7), разбивается линией $\Gamma_z = \{(z, w), w = \bar{z}\}$ на две симметричные части D_z^+ и D_z^-, одна из которых D_z^+ однолистна и при проектировании на плоскость z совпадает с D (заметим, что это условие эквивалентно мероморфности функции $w(z)$ в области D). Введем мероморфные в областях D_z^+ и D_z^- функции $\Phi_k^+(z, w) = \{L_k F(z)\}_{q = \upsilon_q(z), \bar{z}_q = \tilde{\upsilon}_q(z)}$, $(z, w) \in D_z^+$ и $\Phi_k^-(z, w) = \overline{\Phi_k^+(\bar{w}, \bar{z})}$, $(z, w) \in D_z^-$, принимающие комплексно сопряженные значения в точках (z, w) и $(\bar{w}, \bar{z})$, симметричных относительно Γ_z. Используя (5), получим относительно функций $\Phi_k^{\pm}(z, w)$ краевую задачу Римана на римановой поверхности D_z с условием симметрии: $\Phi_k^-(z, w) = \overline{\Phi_k^+(\bar{w}, \bar{z})}$. Ясно, что и этот метод применим лишь для областей, отображаемых на круг с помощью рациональной функции (при $\nu = 1$) и для областей класса A (при $\nu > 1$).

Рассмотрим конкретные задачи.

1°) Пусть $L_k = \partial^{n-1}/\partial x^{n-k-1}\partial y^k$, D — внешность эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Ищется решение, исчезающее на бесконечности. Функции, отображающие конформно E на D_k, имеют вид $\omega_k(\zeta) = (a + is_k b)\zeta/2 + (a - is_k b)/2\zeta$. Полагая

$$\Phi_k(\zeta) = \sum_{q=1}^{\nu} \sum_{j=0}^{\lambda_q - 1} j! \sum_{\alpha=k-j}^{k} C_k^{\alpha} \bar{s}_q^{k-\alpha} s_q^{\alpha} \sum_{\beta=n-j-\alpha-1}^{n-k-1} C_{n-k-1}^{\beta} \frac{[\tilde{\omega}_q(\zeta)]^{j+\alpha+\beta-n+1}}{(j+\alpha+\beta-n+1)!} \times \\ \times \varphi_{qj}^{(\alpha+\beta)}[\omega_q(\zeta)] \tag{8}$$

и используя условия (5), получим

$$\operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} [a_{jk}(\sigma) - ib_{jk}(\sigma)]\, \Phi_k(\sigma) = c_j(\sigma), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{9}$$

краевую задачу Гильберта для функций $\Phi_k(\zeta)$, аналитических в E и обращающихся в нуль порядка n в начале координат. Решив эту задачу, находим из системы дифференциальных уравнений (8) искомые функции

$$\varphi_{qj}(z_q) = \left[j!\,(n-j-2)! \prod_{\mu \neq q} \left(\frac{s_\mu - s_q}{2i \operatorname{Im} s_\mu} \right)^{\lambda_\mu} \right]^{-1} \int_{\infty}^{z_q} (z_q - \tau_q)^{n-j-2} \Big\{ \Omega_{qj}[\omega_q^{-1}(\tau_q)] - \\ - \Big[\partial^{n-1} \Big(\sum_{k=j+1}^{\lambda_q - 1} \bar{\tau}_q^k \varphi_{qk}(\tau_k) \Big) \Big/ \partial\bar{\tau}_1^{\lambda_1} \ldots \partial\tau_q^{\lambda_q - j - 1} \partial\bar{\tau}_q^{j} \ldots \partial\bar{\tau}_\nu^{\lambda_\nu} \Big]_{\bar{\tau}_q = \bar{\omega}_q[(\omega_q^{-1}(\tau_q))^{-1}]} \Big\} d\tau_q,$$

$$\Omega_{qj}(\zeta) = (-1)^{\lambda_q - j - 1} \left(\frac{i}{2\,\mathrm{Im}\, s_q}\right)^{-1} \prod_{p=1}^{\nu} \left(\frac{i}{2\,\mathrm{Im}\, s_p}\right)^{\lambda_p} \sum_{0 \leqslant \gamma_\delta \leqslant \lambda_\delta} \left[\prod_{m \neq q} C_{\lambda_m}^{\gamma_m} (-s_m)^{\gamma_m}\right] \times$$

$$\times \sum_{\alpha=0}^{\lambda_q - j - 1} \sum_{\beta=0}^{j} (-1)^{\alpha+\beta} C_{\lambda_q - j - 1}^{\alpha} C_j^{\beta} \bar{s}_q^{\alpha} s_q^{\beta} \Phi_{n - \sum\limits_{m \neq q} \gamma_m - \alpha - \beta - 1}(\zeta).$$

Условия разрешимости и число решений краевой задачи (5) совпадает с условиями разрешимости и числом решений задачи Гильберта (9).

2°) Пусть $L_k = \partial^k / \partial y^k$, D — верхняя полуплоскость $y > 0$. Будем искать решение в классе функций, имеющих непрерывную на вещественной оси Γ производную $\partial^{n-1} F(z) / \partial y^{n-1}$, а производные $\partial^k F(z) / \partial y^k$, $k = 0, \ldots, n-2$, непрерывные на Γ всюду, кроме бесконечно удаленной точки, где они могут обращаться в бесконечность порядка не выше $n - k - 1$. Характеристическая функция контура Γ имеет вид $w(z) \equiv z$.

Полагая

$$\Phi_k(z) = \sum_{q=1}^{\nu} \sum_{j=0}^{\lambda_q - 1} \sum_{m=0}^{\min(k, j)} C_k^m \frac{j!\, s_q^{k-m} \bar{s}_q^{m}}{(j-m)!} z^{j-m} \varphi_{qj}^{(k-m)}(z) \tag{10}$$

и используя условия (5), получим краевую задачу Гильберта для функций $\Phi_k(z)$, аналитических в верхней полуплоскости и допускающих бесконечность порядка $n - k - 1$ в точке $z = \infty$. Определив функции $\Phi_k(z)$, из системы (10) находим

$$\varphi_{qj}(z_q) = \left[j!\, (\lambda_1 + \ldots + \lambda_{q-1} - 1)! \prod_{\delta=1}^{q-1} \left(\frac{s_\delta - s_q}{2i\,\mathrm{Im}\, s_\delta}\right)^{\lambda_\delta}\right]^{-1} \int_i^{z_q} (z_q - \tau_q)^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{q-1} - 1} \times$$

$$\times \left\{ \Omega_{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{q-1} + j}(\tau_q) - \frac{\partial^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{q-1} + j}}{\partial \bar{\tau}_1^{\lambda_1} \ldots \partial \bar{\tau}_q^{j}} \left[\bar{\tau}_q^{j+1} \varphi_{q, j+1}(\tau_q) + \ldots + \bar{\tau}_q^{\lambda_q - 1} \varphi_{q, \lambda_q - 1}(\tau_q) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{r=q+1}^{\nu} \sum_{k=0}^{\lambda_r - 1} \bar{\tau}_r^{k} \varphi_{rk}(\tau_r) \right]_{\bar{\tau}_r = \bar{\tau}_q}^{\tau_r = \tau_q} \right\} d\tau_q,$$

$$\Omega_{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{q-1} + j}(z) = \sum_{\beta=0}^{j} \sum_{\alpha=1}^{q-1} \sum_{\beta_\alpha = 0}^{\lambda_\alpha} C_j^{\beta} (-s_q)^{j-\beta} \left(\frac{i}{2\,\mathrm{Im}\, s_q}\right)^{j} \times$$

$$\times \left[\prod_{\delta=1}^{q-1} C_{\lambda_\delta}^{\beta_\delta} (-s_\delta)^{\lambda_\delta - \beta_\delta} \left(\frac{i}{2\,\mathrm{Im}\, s_\delta}\right)^{\lambda_\delta}\right] \Phi_{(\beta_1 + \ldots + \beta_q)}^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{q-1} + j - \beta_1 - \ldots - \beta_q)}(z).$$

Задача (5) в этом случае разрешима при тех же условиях, что и соответствующая ей задача Гильберта. Число решений задачи (5) также равно числу решений этой задачи Гильберта.

В заключение приношу глубокую благодарность Л. И. Чибриковой за внимание к работе и ценные советы.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
24 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Levi, Math. Notal., 14, 50 (1954). [2] М. Б. Балк, М. Ф. Зуев, УМН, 25, 5 (1970). [3] И. Н. Карцивадзе, Сообщ. АН ГрузССР, 7, № 8, 507 (1946). [4] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., 1966. [5] П. К. Зерагия, Тр. Тбилисск. матем. инст. АН ГрузССР, в. 8, 135 (1940) [6] В. С. Рогожин, Уч. зап. Казанск. унив., 110, № 3, 71 (1950). [7] М. П. Ганин, ДАН, 80, № 3, 313 (1951). [8] Г. Н. Савин, ДАН, 23, № 3, 217 (1939). [9] Д. М. Волков, Уч. зап. Ленингр. унив., сер. физ.-матем., в. 14, 25 (1948). [10] P. R. Garabedian, J. Rat. Mech. and Anal., 3, № 3 (1954). [11] R. Legendre, Bull. Soc. franc. Méc., № 8 (1953). [12] C. Mathurin, Pabls. sci. et techn. Ministére air, NT, 105, 1 (1962). [13] Л. И. Чибрикова, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 10, 102 (1967). [14] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. [15] Л. И. Чибрикова, Тр. семин. по краевым задачам, в. 3, 202 (1966).