

Е. Д. ЯКУБОВИЧ

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩЕГО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНУЮ СТАБИЛИЗАЦИЮ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 VI 1972)

В работе ⁽¹⁾ рассматривается задача о выборе параметров линейной системы дифференциальных уравнений таких, что для любого решения $x(t)$ справедлива оценка $|x(t)| < e^{-\alpha t}|x(0)|$, где $\alpha \geq 0$ и норма $|x| = \sqrt{x^*Hx}$, $H = H^* > 0$, считаются заданными *. Ниже рассматривается задача об оптимальном выборе этих параметров.

1°. Рассмотрим линейную систему регулирования

$$dx/dt = Ax + Ru, \quad u = -S^*x \quad (1)$$

и положительно определенную форму $V(x) = x^*Px$, $H > 0$. Здесь x — n -мерный вектор состояний, u — вектор управлений порядка m ($m \leq n$); A , H , R , S — постоянные вещественные матрицы порядков $n \times n$, $n \times n$, $n \times m$, $n \times m$ соответственно, звездочка означает транспонирование. Ниже предполагается, что ранг матрицы R равен m .

Задача состоит в том, чтобы по заданным матрицам A , H , R определить матрицу S (из заданного класса) так, чтобы на любом решении системы (1) неравенство

$$dV(x)/dt + 2\alpha V(x) \leq 0 \quad \forall x, \quad (2)$$

выполнялось с максимально большим числом $\alpha \geq 0$. Здесь $dV(x)/dt = 2x^*H(A + RS^*)x$ — производная форма $V(x)$, вычисленная в силу системы (1). При фиксированном α положим

$$\delta(S) = \inf_{x \neq 0} [-(dV/dt + 2\alpha V(x))/V(x)]. \quad (3)$$

Аналогично ⁽¹⁾ назовем матрицу R допустимой, если существует матрица S (называемая парной матрице R) такая, что $\delta(S) > 0$. Пусть $\mathcal{M}$ — некоторое подмножество в множестве $n \times m$ вещественных парных матриц. Назовем парную матрицу S_0 оптимальной в множестве $\mathcal{M}$, если верхняя грань

$$\delta_0 = \sup \delta(S) \quad \text{при} \quad S \in \mathcal{M} \quad (4)$$

достигается на этой матрице, т. е. если $\delta_0 = \delta(S_0)$. Если верхняя грань в множестве $\mathcal{M}$ не достигается, то последовательность матриц $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(S_n) = \delta_0$, назовем оптимизирующей последовательностью в множестве $\mathcal{M}$.

Сформулированная выше задача сводится к определению для заданного множества $\mathcal{M}$ числа δ_0 и оптимальной матрицы $S_0 \in \mathcal{M}$ или оптимизирующей последовательности $S_n \in \mathcal{M}$. В теоремах 3, 4 приведено решение этой задачи для множества $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\infty$ всех $(n \times m)$ -матриц и для множества $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\kappa$ всех $(n \times m)$ -матриц S таких, что $\|S\| \leq \kappa$. Теоремы 1, 2 дополняют результаты ⁽¹⁾.

* Здесь и ниже неравенство $H > 0$ означает, что $x^*Mx > 0 \quad \forall x \neq 0$, неравенство $H_1 > H_2 > 0$ означает, что $H_1 - H_2 > 0$.

Обозначим через $C_\alpha = -(A^*H + HA + 2\alpha H)$ матрицу квадратичной формы $-dV/dt - 2\alpha V(x)$, вычисленной в силу первого уравнения (1) для $u = 0$. Предположим, что форма $x^*C_\alpha x$ знакопеременна, но не вырождена и имеет μ_α отрицательных квадратов, $\mu_\alpha \leq m$. (При $\mu_\alpha > m$ матрица R не является допустимой (1).) Тогда $(m \times m)$ -матрица $R^*HC_\alpha^{-1}HR$ является невырожденной.

Обозначим

$$\tau_0 = -(R^*HC_\alpha^{-1}HR)^{-1}. \quad (5)$$

Теорема 1. Для того чтобы матрица R была допустимой, необходимо, чтобы неравенство $C_\alpha + HR\tau R^*H > 0$ было выполнено для любой $(m \times m)$ -матрицы $\tau = \tau^* > \tau_0$, и достаточно, чтобы это неравенство было выполнено для какой-либо матрицы $\tau = \tau^*$. При этом будет $\tau > \tau_0$ и любая матрица $S = HR\sigma$, где $\sigma + \sigma^* = \tau$, является парной к R .

Теорема 2. Для того чтобы матрица R была допустимой, необходимо и достаточно, чтобы матрица (5) имела ровно μ_α положительных собственных значений.

Теорема 3. Пусть R — допустимая матрица и $\mu_\alpha = m$. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\infty$ — множество всех $n \times m$ парных матриц S , $\mathfrak{M}_0$ — множество парных матриц вида $S = HR\sigma$, где σ — произвольная вещественная $(m \times m)$ -матрица, и λ_{m+1} — наименьший положительный корень уравнения $\det(C_\alpha - \lambda H) = 0^*$.

Тогда: 1) Верхние грани (4) на множествах $\mathfrak{M}_\infty$ и $\mathfrak{M}_0$ совпадают.

2) Число δ_0 удовлетворяет неравенству $0 < \delta_0 \leq \lambda_{m+1}$.

3) Пусть $S = HR\sigma$ — какая-либо парная матрица и $\mu = \mu_{\min}(\delta)$ — минимальный корень уравнения

$$\det \begin{vmatrix} \mu I_n - H^{-1/2}C_\alpha H^{-1/2} & H^{1/2}R \\ R^*H^{1/2} & (\sigma + \sigma^*)^{-1} \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Тогда $\delta(S) = \min[\lambda_{m+1}, \mu_{\min}(\sigma)]$.

4) Верхняя грань (4) определяется формулой $\delta_0 = \min[\lambda_{m+1}, \mu_{\min}^0]$, где $\mu_{\min}^0$ — минимальный корень уравнения (6), в котором матрица $(\sigma + \sigma^*)^{-1}$ заменена $m \times m$ нулевой матрицей.

5) Если $\delta_0 < \lambda_{m+1}$, то в множестве $\mathfrak{M}_\infty$ оптимальной матрицы не существует, и любая последовательность $S_k = HR\sigma_k$, где $(\sigma_k + \sigma_k^*) \rightarrow 0^{**}$, является оптимизирующей.

6) Если оптимальная матрица S_0 существует, то $\delta_0 = \lambda_{m+1}$.

7) Пусть существует конечный предел $\sigma_1 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \{R^*H[(\lambda_{m+1} + \xi)H - C_\alpha]^{-1}HR\}^{-1}$ и выполняется неравенство $2\sigma_1 > \tau_0$.

Тогда $\delta_0 = \lambda_{m+1}$ и матрица $S = HR\sigma_1$ является оптимальной в множестве $\mathfrak{M}_\infty$. Конечный предел σ_1 существует, например, если векторы-столбцы матрицы $H^{1/2}R$ лежат в подпространстве собственных векторов матрицы $H^{-1/2}C_\alpha H^{-1/2}$, отвечающих отрицательным собственным значениям.

8) Пусть $m = \mu_\alpha = 1$ и a_2 — собственный вектор матрицы $H^{-1/2}C_\alpha H^{-1/2}$, отвечающий ее минимальному положительному собственному значению λ_2 . Для того чтобы в классе $\mathfrak{M}_\infty$ существовала оптимальная $(n \times 1)$ -матрица S_1 , $|S_1| < \infty$, необходимо, чтобы $a_2^*H^{1/2}R = 0$, и достаточно, чтобы выполнялись условия: $a_2^*H^{1/2}R = 0$ и $\sigma_1^{-1} = 2 \lim_{\xi \rightarrow 0} \{R^*H[(\lambda_2 + \xi)H - C_\alpha]^{-1}HR\} > 0$.

При этом последний предел существует и конечен.

В случае, когда оптимальной матрицы не существует, для оптимизирующей последовательности п. 5 теоремы 3 имеем $\|S_k\| \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим в связи с этим задачу о нахождении оптимальной матрицы S в

* Так как $\mu_\alpha = m$, то это уравнение имеет m отрицательных корней.

** Запись $\tau^{-1} \rightarrow 0$ означает, что минимальное собственное значение матрицы τ стремится к ∞ .

множестве $\mathfrak{M}_\kappa$ $n \times m$ парных матриц, ограниченных по норме числом κ : $\mathfrak{M}_\kappa = \{S: \|S\| \leq \kappa\}$.

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\kappa$. Тогда:

1) Если число κ удовлетворяет неравенству $\kappa \leq \frac{1}{2}\|\tau_0\| \cdot \|HR\|$, то множество $\mathfrak{M}_\kappa$ пусто.

2) При $\kappa > \frac{1}{2}\|\tau_0\| \cdot \|HR\|$ матрица $S_0 = \kappa HR(R^*H^2R)^{-1/2}$ является оптимальной в множестве $\mathfrak{M}_\kappa$. При этом значение (4) является минимальным корнем уравнения (6), в котором $(\sigma + \sigma^*)^{-1} = \frac{1}{2\kappa} (R^*H^2R)^{-1/2}$.

2°. Доказательство теорем 1, 2 не приводится. Схема доказательства теоремы 3 дается (для простоты) для случая $m = \mu_\alpha = 1$, т. е. когда R и S — векторы. Общие черты доказательства сохраняются и при $m > 1$. Наконец, доказательство теоремы 4 близко к доказательству соответствующих пунктов теоремы 3.

Доказательство теоремы 3. Для простоты доказательства предполагаем, что собственное значение λ_2 матрицы $H^{-1/2}C_\alpha H^{-1/2}$ имеет кратность единица.

1) Представим вектор S в виде $S = HR\lambda + Z$, $Z^*HR = 0$. Форма $-(dV(x)/dt + 2\alpha V(x))$ при этом имеет вид $x^*(K + HRZ^* + ZR^*H)x$, где $K = C_\alpha + 2\lambda HRR^*H$. По теореме 1, в силу допустимости матрицы R при $2\lambda > (-R^*HC_\alpha^{-1}HR)^{-1}$ выполнено неравенство $K > 0$. Положив $Z_1 = K^{-1/2}Z$, $R_1 = K^{-1/2}RH$, $u = K^{1/2}x$, запишем (3) в виде

$$\delta(S) = \inf_{y \neq 0} \{u^* [I + R_1 Z_1^* + Z_1 R_1^*] u\} / u K^{-1/2} H K^{-1/2} u.$$

Тогда $S_0 = \sup_{\lambda} \sup_{L_1} \delta(S)$. Очевидно, внутренний супремум достигается при $Z_1 = 0$, т. е. при $Z = 0$, что и требовалось доказать.

2) Здесь и ниже предполагаем, что $S \in \mathfrak{M}_0$. Имеем $\delta(S) > 0$, так как в силу допустимости матрицы R матрица $S = HR\sigma$ при $2\sigma > (-R^*HC_\alpha^{-1}HR)^{-1}$ является парной и $x^*Kx > 0$. Из теоремы 16 ((²), гл. X), имеем $\delta(S) \leq \lambda_2$, так как форма x^*HRR^*Hx имеет ранг единица. Ниже используются обозначения: $H^{\frac{1}{2}}R = B$, $H^{-1/2}C_\alpha H^{-1/2} = L$, $H^{\frac{1}{2}}x = y$, $S = \sigma H^{\frac{1}{2}}B$. Тогда (3) примет вид

$$\delta(S) = \inf_{y \neq 0} \frac{y^* (L + 2\sigma BB^*) y}{y^* y}.$$

Ищем минимальное собственное значение $\delta(S(\sigma))$ матрицы $L + 2\sigma BB^*$. На любом собственном векторе v имеем равенство $(L + 2\sigma BB^*)v = \mu(\sigma)v$. Если $\mu(\sigma)$ — собственное значение матрицы L , то $B^*v = 0$; если нет, то $B^*v \neq 0$ и $\det(\mu(\sigma)I_n - L) \neq 0$. После простых преобразований получаем: $[1 - 2\sigma B^*(\mu(\sigma)I_n - L)^{-1}B]B^*v = 0$. Очевидно, что корни $\mu(\sigma)$ уравнения $1 - 2\sigma B^*(\mu(\sigma)I_n - L)^{-1}B = 0$ являются собственными значениями матрицы $L + 2\sigma BB^*$. Последнее уравнение совпадает для $m = 1$ с уравнением (4) и имеет, вообще говоря, n корней, положительных в силу парности матрицы S . Если $\mu_{\min}(\sigma) \leq \lambda_2$, то $\delta(\sigma) = \mu_{\min}$; в противном случае, в силу 2), $\delta(\sigma) = \lambda_2$ и $v(\sigma) = a_2$.

4) Пусть $\delta(\sigma) < \lambda_2$, т. е. $\delta(\sigma)$ определяется из уравнения (4). Легко показать, что при $\sigma > 0$ корни $\mu(\sigma)$ уравнения (4) суть функции возрастающие, т. е. $\sup \mu_{\min}(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \mu_{\min}(\sigma)$.

5) Очевиден в силу 4).

6) Предположив, что $\delta_0 < \lambda_2$, приходим к противоречию в силу строгой положительности $\mu'_{\min}(\sigma)$.

8) Пусть $S = H^{\frac{1}{2}}R\tau$ — оптимальная матрица. Тогда в силу 6) $\delta_0 = \lambda_2$. Имеем очевидную цепочку равенств

$$(L + B\tau B^*)v = \lambda_2 v, \quad a_2^*(\lambda_2 I_n - L)v = 0 = a_2^* B\tau B^* v.$$

Поскольку S — парная матрица, то $\tau > 0$, откуда или $a_2^* B = 0$ или $B^* v = 0$. Однако из $B^* v = 0$ следует, что $v = a_2$.

Обратно, пусть $B^* a_2 = 0$. Тогда легко показать, что при $\tau = 2\sigma_1$ матрица $L + 2\sigma_1 B B^*$ имеет число λ_2 собственным значением второй кратности. Поскольку $\sigma_1 > 0$, то $\delta_0 = \lambda_2$ (равенство $2\sigma_1 > \tau_0$ выполняется автоматически). Отсюда $S = H R \sigma_1$ — оптимальная матрица.

Ленинградский электротехнический институт
им. В. И. Ульянова (Ленина)

Поступило
10 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Е. Д. Якубович, ДАН, 186, № 1 (1969). ² Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, «Наука», 1967.