

УДК 519.53 + 519.217

МАТЕМАТИКА

Б. М. ГУРЕВИЧ, В. И. ОСЕЛЕДЕЦ

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИББСА И ДИССИПАТИВНОСТЬ У-ДИФФЕОМОРФИЗМОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 VI 1972)

1. В этой заметке мы используем некоторые понятия статистической физики для доказательства диссипативности У-диффеоморфизма (см. ⁽¹⁾) в случае отсутствия у него конечной инвариантной меры, эквивалентной риманову объему.

Напомним, что обратимое и измеримое вместе с обратным преобразованием T пространства с мерой (M, μ) называется диссипативным, если существует такое измеримое множество $A \subset M$, что $T^i A \cap T^j A = \emptyset$ при $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{Z}$, и $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} T^i A = M \pmod{0}$. Если мера μ конечна и инвариантна относительно T , то диссипативность невозможна в силу теоремы о возвращении ⁽²⁾. В рассматриваемом нами случае У-диффеоморфизма мера, индуцированная римановым объемом, квазиинвариантна.

Мы будем следовать подходу Я. Г. Синае ^(3, 4), который ввел класс инвариантных гиббсовских мер для произвольной топологической динамической системы и исследовал с помощью топологических цепей Маркова свойства этих мер в случае У-систем.

Приведем определение, предложенное Синаем. Пусть X — компакт, τ — его гомеоморфизм, μ — вероятностная мера на X , инвариантная относительно τ , и $f^-(x)$, $f^+(x)$, $x \in X$, — непрерывные функции. При любых $m > 0$, $n > 0$ равенство

$$\frac{d\mu_{m,n}}{d\mu} = Z_{m,n}^{-1} \exp \left[\sum_{i=-n}^0 f^-(\tau^i x) + \sum_{i=1}^m f^+(\tau^i x) \right],$$

где

$$Z_{m,n} = \int_X \exp \left[\sum_{i=-n}^0 f^-(\tau^i x) + \sum_{i=1}^m f^+(\tau^i x) \right] d\mu,$$

определяет вероятностную меру $\mu_{m,n}$. Всякая предельная точка (в смысле слабой сходимости) последовательности мер $\mu_{m,n}$ ($m, n \rightarrow \infty$) называется мерой Гиббса, построенной по мере μ и функциям f^-, f^+ *.

2. Пусть (X, τ) — аperiodическая топологическая цепь Маркова с конечным числом состояний и μ — отвечающая ей мера с максимальной энтропией (см. ^(5, 6)). Тогда справедливо следующее утверждение, доказанное для случая $f^- = f^+$ в работе ⁽³⁾.

Теорема 1. Если функции f^-, f^+ удовлетворяют условию Гёльдера, то существуют пределы

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \mu_{m,n} = \mu(f^-, f^+), \quad \lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{1}{m+n} \ln Z_{m,n} = P(f^-, f^+),$$

причем $P(f^-, f^+) = \frac{1}{2}[P(f^-, f^-) + P(f^+, f^+)]$.

* В ^(3, 4) рассмотрен случай, когда $f^+ = f^-$. Приведенное здесь обобщение также принадлежит Я. Г. Синаю.

Мы и в дальнейшем будем предполагать выполненным условие Гёльдера для функций f^-, f^+ .

Теорема 2. Мера $\mu(f^-, f^+)$ квазиинвариантна относительно τ , причем

$$\frac{d\tau\mu(f^-, f^+)}{d\mu(f^-, f^+)} = \exp[P^+ - P^- + f^-(\tau x) - f^+(x)],$$

где $P^- = P(f^-, f^-)$, $P^+ = P(f^+, f^+)$.

Теорема 3. Если $\mu(f^-, f^-) \neq \mu(f^+, f^+)$, то динамическая система $(X, \tau, \mu(f^-, f^+))$ диссипативна.

З а м е ч а н и е. В ⁽³⁾ показано, что равенство $\mu(f^-, f^-) = \mu(f^+, f^+)$ выполняется в том и только том случае, когда

$$f^+ = f^- + u(x) - u(\tau x) + \text{const},$$

причем функция $u(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера.

Намстим доказательство теоремы 3. Чтобы убедиться в ее справедливости, достаточно установить сходимость почти всюду относительно меры

$\mu(f^-, f^+)$ ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d\tau^n \mu(f^-, f^+)}{d\mu(f^-, f^+)}$. Мы покажем, что последовательность

функций $\psi_n(x) = \frac{d\tau^n \mu(f^-, f^+)}{d\mu(f^-, f^+)}$ при $|n| \rightarrow \infty$ $\mu(f^-, f^+)$ -почти всюду сходится к нулю с экспоненциальной скоростью. Если $n > 0$, то в силу теоремы 2

$$\psi_n(x) = \exp \left[n(P^+ - P^-) + n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^-(\tau^k x) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^+(\tau^k x) \right) \right].$$

Из эргодичности системы $(X, \tau, \mu(f^+, f^+))$ вытекает, что $\mu(f^+, f^+)$ -почти всюду

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \psi_n(x) = P^+ - P^- + \int_X f^-(x) d\mu(f^+, f^+) - \int_X f^+(x) d\mu(f^+, f^+).$$

Важно заметить, что это соотношение выполняется почти всюду и относительно меры $\mu(f^-, f^+)$. Причина в том, что меры $\mu(f^-, f^-)$ и $\mu(f^+, f^+)$, будучи сингулярными на всей борелевской σ -алгебре в X , эквивалентны на ее подалгебре, порожденной значениями координат x_i точек $x \in X$ при всех $i > 0$. Теперь воспользуемся следующими формулами из работы ⁽³⁾:

$$f^-(x) = \ln \mu^-(x_0/x_{-1}, x_{-2}, \dots) + P^- + l^-(\tau x) - l^-(x),$$

$$f^+(x) = \ln \mu^+(x_0/x_{-1}, x_{-2}, \dots) + P^+ + l^+(\tau x) - l^+(x),$$

где $\mu^-(x_0/x_{-1}, x_{-2}, \dots)$ — функция, равная в точке $x = \{x_i, i \in \mathbb{Z}\} \in X$ условной мере (речь идет о мере $\mu(f^-, f^-)$) цилиндра, определяемого координатой x_0 , при условии, что фиксированы координаты с отрицательными индексами, $l^-(x)$ — непрерывная функция и $\mu^+(x_0/x_{-1}, x_{-2}, \dots)$, $l^+(x)$ имеют аналогичный смысл. С учетом этих формул получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \psi_n(x) = \int_X [\ln \mu^-(x_0/x_{-1}, x_{-2}, \dots) - \ln \mu^+(x_0/x_{-1}, x_{-2}, \dots)] d\mu(f^+, f^+).$$

Из соображений выпуклости вытекает, что последнее выражение отрицательно, если $\mu(f^-, f^-) \neq \mu(f^+, f^+)$. Таким образом, $\psi_n(x)$ экспоненциально быстро сходится к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Случай $n < 0$ сводится к разобранному.

3. Эффективный метод исследования U -систем основан на возможности описания их с помощью очень простой символической динамики. Как обнаружил Синай ⁽⁷⁾ (см. также ⁽⁸⁻¹⁰⁾), всякий U -диффеоморфизм является непрерывным образом некоторой топологической цепи Маркова, причем соответствующее отображение по существу взаимно однозначно.

Рассмотрим транзитивный $У$ -дiffeоморфизм T класса C^2 замкнутого риманова многообразия M и непрерывное отображение φ топологической цепи Маркова (X, τ) на (M, T) , построенное с помощью марковского разбиения многообразия M (см. ^(7, 8, 10)). Пусть λ_c, λ_p — коэффициенты сжатия и растяжения сжимающегося и расширяющегося слоений соответственно. Эти функции удовлетворяют условию Гёльдера (см. ⁽¹⁴⁾). Из свойств φ следует, что тогда $f_c = \varphi^*(\ln \lambda_c)$ и $f_p = \varphi^*(-\ln \lambda_p)$ — непрерывные функции на X , также удовлетворяющие условию Гёльдера. Обозначим ρ меру на M , индуцированную римановым объемом.

Теорема 4. *Отображение φ индуцирует изоморфизм mod 0 динамических систем с квазиинвариантной мерой $(X, \tau, \mu(f_c, f_p))$ и (M, T, ρ) (класс меры $\mu(f_c, f_p)$) переходит в класс меры ρ .*

В работе ⁽⁷⁾ были введены инвариантные меры μ_c и μ_p , абсолютно непрерывные относительно риманова объема соответственно на слоях сжимающегося и расширяющегося слоений. В ⁽³⁾ показано, что $\mu_c = \varphi(\mu(f_c, f_c))$, $\mu_p = \varphi(\mu(f_p, f_p))$ и diffeоморфизм T допускает конечную инвариантную меру, эквивалентную ρ , в том и только том случае, когда $\mu_c = \mu_p$. Из теорем 3 и 4 теперь вытекает

Теорема 5. *Если транзитивный $У$ -дiffeоморфизм не допускает конечной инвариантной меры, эквивалентной мере ρ , то он диссипативен относительно ρ .*

В ⁽³⁾ показано, что множество $У$ -дiffeоморфизмов, удовлетворяющих условиям этой теоремы, не пусто.

С наглядной точки зрения явление, описываемое теоремой 5, объясняется тем, что меры ρ, μ_c, μ_p взаимно сингулярны и при $n \rightarrow +\infty (-\infty)$ мера $T^n \rho$ быстро сходится к μ_p (μ_c) (см. ⁽⁴⁾).

Следствие 1. *В условиях теоремы 5 разбиение пространства (M, ρ) на траектории diffeоморфизма T измеримо.*

Следствие 2. *В условиях теоремы 5 уравнение*

$$\ln w(x) = u(Tx) - u(x),$$

где $w(x) = \frac{dT\rho}{d\rho}$, а $u(x)$ — неизвестная функция, разрешимо в классе измеримых функций, но не имеет непрерывных решений.

Следствие 3. *Любой транзитивный $У$ -дiffeоморфизм обладает σ -конечной инвариантной мерой, эквивалентной риманову объему.*

В заключение отметим, что изложенные результаты были получены при попытке ответить на один вопрос Я. Г. Синая. Авторы выражают благодарность Я. Г. Синаю за поддержку и полезные советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
20 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. В. Аносов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **90** (1967).
² П. Халмош, Лекции по эргодической теории, М., 1959. ³ Я. Г. Синай, УМН, **27**, в. 4 (1972). ⁴ Ja. G. Sinai, Actes Congrès intern. Math., **2**, 1970. ⁵ W. Parry, Trans. Am. Math. Soc., **112**, № 1 (1964). ⁶ R. L. Adler, B. Weiss, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **57**, № 6 (1967). ⁷ Я. Г. Синай, Функц. анализ и его прилож., **2**, в. 4 (1968). ⁸ R. Bowen, Am. J. Math., **92**, № 3 (1970). ⁹ Б. М. Гуревич, Функц. анализ и его прилож., **4**, в. 4 (1970). ¹⁰ Б. М. Гуревич, Я. Г. Синай, Цепи Маркова и автоморфизмы тора, дополнение к кн. П. Биллингсли, Эргодическая теория и информация, М., 1969. ¹¹ Д. В. Аносов, Матем. заметки, **2**, в. 5 (1967).