Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 5

УДК 532.501 ФИЗИКА

В. Е. ЗАХАРОВ, С. Л. МУШЕР

О КОЛМОГОРОВСКОМ СПЕКТРЕ В СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

(Представлено академиком Р. З. Сагдеевым 27 VI 1972)

Задача о стохастическом поведении системы нелинейно взаимодействующих осцилляторов возникает в различных областях физики. Если эти осцилляторы представляют собой собственные колебания (например, бегущие волны) в слабонелинейной среде, говорят о слабой турбулентности (см. например, ([1])).

Слабую турбулентность можно описывать кинетическими уравнениями для корреляционных функций. Как показано в работах ([2-4]), эти уравнения имеют точные стационарные степенные решения колмогоровского типа, соответствующие постоянству потоков энергии или числа квазичастиц в $\mathfrak{K}$-пространстве. Встает вопрос об условиях реализации этих спектров и характера их установления. Эта важная задача с трудом поддается аналитическому исследованию, так что естественным является применение ЭВМ. Настоящая работа содержит изложение численного эксперимента по кинетике слабой турбулентности для одной модельной системы нелинейных осцилляторов.

Мы рассматривали систему осцилляторов с гамильтонианом

$$\mathscr{H} = \sum_n \omega_n a_n a_n^* + \sum_{n,\, n_1,\, n_2} V_{n,\, n_1,\, n_2}(a_n^* a_{n_1} a_{n_2} + a_n a_{n_1}^* a_{n_2}^*), \tag{1}$$

$\omega_n = \lambda n$ — частота осцилляторов, a_n — комплексные нормальные переменные.

Этому гамильтониану соответствует уравнение движения для a_n

$$\frac{\partial a_n}{\partial t} + i\omega_n a_n = -i \sum_{n_1,\, n_2} (V_{nn_1n_2} a_{n_1} a_{n_2} + 2V_{n_1,\, n,\, n_2} a_{n_1} a_{n_2}^*). \tag{2}$$

Усреднение уравнения (2) в предположении малой нелинейности приводит к кинетическому уравнению для $N_n = \langle |a_n|^2 \rangle$

$$\frac{\partial N_n}{\partial t} = 2\pi \sum_{n_1 n_2} |V_{nn_1n_2}|^2 \{(N_{n_1}N_{n_2} - N_n N_{n_1} - N_n N_{n_2})\,\delta(\omega_n - \omega_{n_1} - \omega_{n_2}) + 2(N_{n_1}N_{n_2} + N_n N_{n_2} - N_n N_{n_1})\,\delta(\omega_n + \omega_{n_1} - \omega_{n_2})\}. \tag{3}$$

При большом числе осцилляторов их можно считать расположенными непрерывно и перейти от суммирования по n к интегрированию по ω:

$$\frac{dN_\omega}{dt} = \frac{2\pi}{\lambda^2} \int_0^\omega |V_{\omega\omega_1\omega_2}|^2 \{(N_{\omega_1}N_{\omega_2} - N_\omega N_{\omega_1} - N_\omega N_{\omega_2})\,\delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) + 2(N_{\omega_1}N_{\omega_2} + N_\omega N_{\omega_2} - N_\omega N_{\omega_1})\,\delta(\omega + \omega_1 - \omega_2)\}\, d\omega_1 d\omega_2. \tag{4}$$

Кинетическое уравнение (4) имеет вид, вполне аналогичный соответствующему уравнению для изотропной двумерной или трехмерной среды после усреднения по углам. Вместе с тем исходная модель (1) содержит гораздо меньшее число осцилляторов, чем эквивалентные ей двумерные или трехмерные модели (M осцилляторов в модели (1) соответствуют M^2

в двумерной и M^3 в трехмерной задаче). Это обстоятельство, обещающее в будущем возможность выхода за рамки слабой турбулентности, и определило выбор модели (1).

Уравнение (4) имеет интеграл энергии $\varepsilon = \int \omega N_\omega d\omega$ и точное стационарное решение $N_\omega = T / \omega$, имеющее смысл распределения Рэлея — Джинса для термодинамического равновесия. Кроме того, если $V_{\omega\omega_1\omega_2}$ — однородная функция,

$$|V_{\omega\omega_1\omega-\omega_1}|^2 = \omega^\alpha f(\omega / \omega_1),$$

то (4) имеет точное решение колмогоровского типа (см. [3, 4])

$$N_\omega = cP^{1/3} / \omega^{(\alpha+3)/2}$$

здесь $c = \mathrm{const}$, P — поток энергии в область больших частот. Это решение

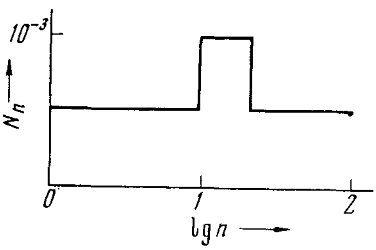

Рис. 1. Начальные условия для задачи об установлении термодинамического равновесия

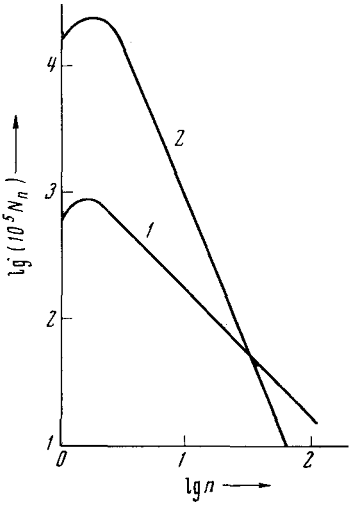

Рис. 2. Распределение осцилляторов по частотам для $t = 5{,}5$. *1* — спектр Рэлей — Джинса, *2* — спектр колмогоровского типа

осуществляется в инерционной области при наличии накачки в области малых частот и поглощении в области больших частот.

Дискретное кинетическое уравнение (3) численно решалось на ЭВМ БЭСМ-6 Вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР для ста осцилляторов. При этом полагали $\alpha = 2$, $f(\zeta) = \zeta^2(1-\zeta)^2$. Было рассмотрено два случая: установление термодинамического равновесия и установление колмогоровского режима. В первом варианте решалась задача Коши с начальными условиями вида, показанного на рис. 1.

Через время порядка единицы начальное распределение переходило в спектр Рэлея — Джинса во всей области частот, кроме малых $n \leqslant 10$ (см. рис. 2). С течением времени эта область уменьшалась, стремясь к нулю; во всей остальной области картина оставалась стационарной. На протяжении всего счета ($t \sim 10$) интеграл энергии сохранялся с точностью 0,5%.

Этот эксперимент подтверждает естественный вывод о том, что система (1) в отсутствие затухания и накачки приходит к термодинамическому равновесию.

Во втором случае в уравнение (3) добавлялись диссипативные члены

$$\partial N_n/\partial t \to \partial N_n/\partial t + \gamma^n_{\text{эф}} N_n,$$

$$\gamma^n_{\text{эф}} = -3\exp\left[-\frac{(n-n_1)^2}{16}\right] + 2\sum_{n'=100}^{n+100} V_{n,n',n'-n} N_{n'-n}, \quad (5)$$

$$n_1 = 10.$$

Первый член в (5) соответствует неустойчивости в области малых частот с максимальным инкрементом при $n = 10$. Второй член возникает, если в кинетическом уравнении для бесконечного числа осцилляторов положить, что для $n > 100$ существует бесконечно сильное затухание; для $n < 100$ этот член описывает поглощение энергии за счет перекачки ее в область $n > 100$.

Начальное условие было выбрано в виде $N_n^0 = \text{const} = 5 \cdot 10^{-5}$. Для $t < 4$ наблюдался рост амплитуды в области неустойчивости. При $t \sim 4$ началась перекачка энергии в область больших частот (отрастание степенного «хвоста»). Одновременно с этим максимум функции распределения начал смещаться в область малых частот от области неустойчивости. На рис. 2 изображено в логарифмическом масштабе распределение N_n для $t = 5{,}5$. В области $80 > n > 9$ с хорошей точностью осуществляется колмогоровский спектр $N_n \sim 1 / n^{5/2}$. Аппроксимация гиперболой $N_n = A / n^\beta$ дает $\beta = 2{,}5 \pm 0{,}025$; при этом N_n изменяется на всем интервале $100 > n > 9$ от 0,7 до $2 \cdot 10^{-5}$ (для $t = 10$). В области $n > 80$, где уже оказывается затухание, N_n убывает быстрее.

В области малых частот за время $t \leqslant 10$ не удалось достичь стационарного режима; максимум функции распределения продолжает смещаться во все меньшие n, возрастая при этом по величине.

Проведенный нами численный эксперимент показывает, что при подкачке в области малых частот и затухании при больших частотах энергия в системе нелинейных осцилляторов распределена по колмогоровскому закону.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
21 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Б. Кадомцев, Турбулентность плазмы, Сборн. Вопросы теории плазмы, 1964, в. 4, стр. 188. [2] В. Е. Захаров, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 4, 35 (1965). [3] В. Е. Захаров, Н. Н. Филоненко, ДАН, **170**, № 6, 1292 (1966). [4] В. Е. Захаров, Р. З. Сагдеев, ДАН, **192**, № 2, 297 (1970).