

М. А. ГОЛЬДМАН, С. Н. КРАЧКОВСКИЙ  
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ ЛИНЕЙНОГО  
ЗАМКНУТОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 VI 1972)

В большинстве исследований устойчивости различных свойств линейного замкнутого оператора, действующего в банаховом пространстве  $X$ , предполагается, что по крайней мере одно из чисел — размерность пространства нулей  $\mathcal{N}(A)$  оператора  $A$  или коразмерность его области значений  $\mathcal{R}(A)$  — конечно. Это предположение влечет существование непрерывного линейного оператора проектирования на  $\mathcal{N}(A)$  или на  $\mathcal{R}(A)$ . Нашей задачей является исследование устойчивости таких свойств оператора, как замкнутость  $\mathcal{R}(A)$ , включение  $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathfrak{M}(A)$  ( $= \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(A^n)$ ),

величина размерности пространств  $\mathcal{N}(A)$  и  $\mathcal{R}(A)^{\perp}$  и ряда других свойств; при этом оба упомянутых выше числа могут быть бесконечными, но предполагается существование непрерывного линейного оператора проектирования  $Q_A$  пространства  $X$  на  $\mathcal{R}(A)$ ; допустимыми возмущающими операторами будут малые по норме коммутирующие с  $A$  линейные операторы  $B$ . Кроме общепринятых обозначений, используются также обозначения, введенные в нашей статье [1<sup>a</sup>].

Пусть  $\mathcal{R}(A)$  замкнуто в  $X$ . Обозначим через  $\hat{A}$  какой-либо однородный оператор на  $\mathcal{R}(A)$  со значениями в  $\mathcal{D}(A)$ , удовлетворяющий условиям:  $A\hat{A} = I_{\mathcal{R}(A)}$  и  $\|\hat{A}y\| \leq C_A \|y\| \quad \forall y \in \mathcal{R}(A)$ , где  $C_A > 0$  не зависит от  $y$ . Обозначим далее через  $S(B)$ ,  $T(B)$  и  $U(B)$  операторы, определяемые равенствами

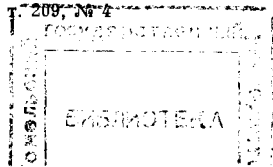
$$S(B) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B^n \hat{A}^n, \quad T(B) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{A}B)^n, \quad U(B) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{A}Q_A B)^n.$$

При условиях  $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathfrak{M}(A)$ ,  $BA \subseteq AB$  и  $\|B\| < C_A^{-1}$  для первых двух рядов и условии  $\|B\| < (C_A \|Q_A\|)^{-1}$  для третьего ряда можно считать, что  $\mathcal{D}(S(B)) = \mathcal{D}(T(B)) = \mathfrak{M}(A)$  и  $\mathcal{D}(U(B)) = X$ . Легко видеть, что  $S(B)x$ ,  $T(B)x \in \mathcal{N}(A+B)$  и  $U(B)x \in \mathcal{N}(A+Q_AB) \quad \forall x \in \mathcal{N}(A)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — банахово пространство;  $A$  — линейный замкнутый оператор с областью определения  $\mathcal{D}(A) \subseteq X$  и замкнутой в  $X$  областью значений  $\mathcal{R}(A)$ , причем  $\mathcal{N}(A) \subseteq \mathfrak{M}(A)$ ;  $B$  — оператор из  $L(X, X)$ , коммутирующий с  $A$  (т. е.  $BA \subseteq AB$ ).

Тогда при достаточно малых  $B$ :

- 1) раствор пространств  $\mathcal{N}(A)$  и  $\mathcal{N}(A+B)$  сколь угодно мал;
- 2)  $\mathcal{N}(A+B) = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{R}(S_{\mathcal{N}}(B)))} = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{R}(T_{\mathcal{N}}(B)))}$  и  $\mathcal{N}(A+Q_AB) = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{R}(U_{\mathcal{N}}(B)))}$ , где индекс  $\mathcal{N}$  служит для обозначения сужения оператора на  $\mathcal{N}(A)$ , а буква  $\mathcal{L}$  — для обозначения линейной оболочки множества;
- 3)  $\mathcal{N}(A+B) \subseteq \mathfrak{M}(A+B)$ .



Доказательство. 1) Пусть  $x \in \mathcal{N}(A)$  и  $\|x\| = 1$ ; тогда  $\rho(x, \mathcal{N}(A+B)) \leq \|x - S_{\mathcal{N}}(B)x\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|B^n A^n x\| \leq C_A \|B\| (1 - C_A \|B\|)^{-1}$ , чем

показана близость  $\mathcal{N}(A)$  к  $\mathcal{N}(A+B)$ . Обратно, пусть  $x \in \mathcal{N}(A+B)$  и  $\|x\| = 1$ ; тогда  $Ax = -Bx$ ,  $x = -\bar{A}Bx + x'$ , где  $x' \in \mathcal{N}(A)$ , и  $\rho(x, \mathcal{N}(A)) \leq \|x - x'\| = \|\bar{A}Bx\| \leq C_A \|B\|$ , т. е.  $\mathcal{N}(A+B)$  близко к  $\mathcal{N}(A)$  (заметим, что последнее установлено с использованием только замкнутости  $A$  и  $\mathcal{R}(A)$ ).

2) Все три равенства доказываются совершенно одинаково. Будем вести запись применительно к оператору  $S_{\mathcal{N}}(B)$ . Так как  $\mathcal{R}(S_{\mathcal{N}}(B)) \subseteq \mathcal{N}(A+B)$ , где  $\|B\| < C_A^{-1}$ , а множество  $\mathcal{N}(A+B)$  линейно и замкнуто, то  $\overline{\mathcal{L}(\mathcal{R}(S_{\mathcal{N}}(B)))} \subseteq \mathcal{N}(A+B)$ . Для доказательства обратного включения предположим противное, т. е. что для любого  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon < C_A^{-1}$ , существует оператор  $B_\varepsilon \in L(X, X)$  такой, что  $\|B_\varepsilon\| < \varepsilon$ ,  $B_\varepsilon A \subseteq AB_\varepsilon$  и

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{N}(S_{\mathcal{N}}(B_\varepsilon)))} \not\subseteq \mathcal{N}(A+B_\varepsilon).$$

Тогда найдется элемент  $x_\varepsilon \in \mathcal{N}(A+B_\varepsilon)$ , удовлетворяющий условиям  $\|x_\varepsilon\| = 1$  и  $\rho(x_\varepsilon, \mathcal{L}_\varepsilon) > 1/2$ . Кроме того,

$$\|x - S_{\mathcal{N}}(B)x\| \leq C_A \|B\| (1 - C_A \|B\|)^{-1} \|x\| \leq C_A \varepsilon (1 - C_A \varepsilon)^{-1} \|x\|,$$

так что при достаточно малом  $\varepsilon$  будем иметь

$$\|x - S_{\mathcal{N}}(B_\varepsilon)x\| < 1/6 \quad \forall x \in K \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in \mathcal{N}(A), \|x\| \leq 2\}.$$

Таким образом,  $\rho(x_\varepsilon, S_{\mathcal{N}}(B)x) > 1/2$  и

$$\|x - S_{\mathcal{N}}(B_\varepsilon)x\| < 1/6 \quad \forall x \in K;$$

следовательно,  $\rho(x_\varepsilon, x) > 1/3 \quad \forall x \in K$ . Но, очевидно,  $\rho(x_\varepsilon, \mathcal{N}(A)) = \rho(x_\varepsilon, K)$ , откуда  $\rho(x_\varepsilon, \mathcal{N}(A)) > 1/3$ , что противоречит п. 1), поскольку  $\varepsilon$  произвольно мало.

3) Имют место равенства

$$(A+B)^n x^{(n)} = S_{\mathcal{N}}(B)x, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$x^{(n)} = \frac{1}{n!} \left( \frac{d^n}{dB^n} S_{\mathcal{N}}(B) \right) x, \quad x \in \mathcal{N}(A), \quad \|B\| < C_A^{-1}.$$

Отсюда получаем  $\mathcal{R}(S_{\mathcal{N}}(B)) \subseteq \mathfrak{M}(A+B)$ ; следовательно,  $\overline{\mathcal{L}(\mathcal{R}(S_{\mathcal{N}}(B)))} \subseteq \overline{\mathfrak{M}(A+B)}$ , т. е.  $\mathcal{N}(A+B) \subseteq \overline{\mathfrak{M}(A+B)}$ .

Теорема 2. Пусть выполнены предпосылки теоремы 1 и, кроме того, в  $L(X, X)$  существует оператор проектирования  $Q_A$  пространства  $X$  на  $\mathcal{R}(A)$ .

Тогда при достаточно малых  $B$ :

1) сужение  $V$  оператора  $Q_A$  на  $\mathcal{R}(A+B)$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между  $\mathcal{R}(A+B)$  и  $\mathcal{R}(A)$ ;

2)  $\mathcal{R}(A+B)$  замкнуто в  $X$ ; следовательно, отображение  $V$  взаимно непрерывно;

3) в  $L(X, X)$  существует оператор проектирования  $Q_{A+B}$  пространства  $X$  на  $\mathcal{R}(A+B)$ , причем  $\mathcal{R}(I - Q_A) = \mathcal{R}(I - Q_{A+B})$  (последнее означает, что  $\mathcal{R}(A)$  и  $\mathcal{R}(A+B)$  имеют общее дополнительное в  $X$  подпространство);

4)  $\mathcal{N}(A+B) \subseteq \mathfrak{M}(A+B)$ ;

5) раствор подпространств  $\mathcal{R}(A)$  и  $\mathcal{R}(A+B)$  сколь угодно мал;

6)  $\mathfrak{M}(A) = \mathfrak{M}(A+B)$ ;

7)  $\overline{\mathfrak{M}(A)} = \overline{\mathfrak{M}(A+B)}$ .

**Доказательство.** 1) Уравнение  $Q_A(A+B)x = Ay$  или равносильное ему уравнение  $Ax + Q_ABx = Ay$  имеет при любом  $y \in \mathcal{D}(A)$  решение  $x = U(B)y$ . Отсюда ясно, что  $V(\mathcal{R}(A+B)) = \mathcal{R}(A)$ . Для доказательства взаимной однозначности  $V$  требуется показать, что однородное уравнение  $Ax + Q_ABx = 0$  имеет решение только в  $\mathcal{N}(A+B)$ , т. е. что  $\mathcal{N}(A+B) = \mathcal{N}(A + Q_AB)$ . Воспользуемся для этого пунктом 2) теоремы 1, согласно которому  $\mathcal{N}(A+B) = \mathcal{L}(\mathcal{R}(T_{A+B}(B)))$  и  $\mathcal{N}(A + Q_AB) = \mathcal{L}(\mathcal{R}(U_{\mathcal{N}(B)}))$ . Так как, очевидно,  $T_{A+B}(B) = U_{\mathcal{N}(B)}$ , то  $\mathcal{N}(A+B) = \mathcal{N}(A + Q_AB)$ .

2) Согласно пункту 1) доказываемой теоремы,  $\mathcal{R}(V) = \mathcal{R}(A)$  и  $\mathcal{N}(V) = \{0\}$ . Поэтому, если показать, что  $V$ , рассматриваемое как оператор, действующий в  $X$ , является относительно открытым отображением, то из теоремы 1в<sup>(16)</sup> будет следовать замкнутость  $V$ , а значит, и замкнутость  $\mathcal{R}(A+B)$ , ибо  $V$  — непрерывный оператор. Относительная открытость  $V$  вытекает из следующих соображений. Прообраз по  $V$  произвольного элемента  $Ay \in \mathcal{R}(V)$  имеет вид  $(A+B)U(B)y = Ay - Q_AB U(B)y + BU(B)y$ , откуда  $\|(A+B)U(B)y\| \leq \|Ay\| + \varepsilon\|y\|$ , где  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $B \rightarrow 0$ . Можно считать, что  $y$  удовлетворяет соотношению  $\hat{A}Ay = y$ ; тогда  $\|y\| \leq C_A\|Ay\|$  и  $\|(A+B)U(B)y\| \leq (1 + \varepsilon C_A)\|Ay\|$ , т. е.  $\|V^{-1}(Ay)\| \leq (1 + \varepsilon C_A)\|Ay\|$ , что и означает относительную открытость  $V$ .

3) Требуемый оператор проектирования определяется формулой  $Q_{A+B} = V^{-1}Q_A$ .

4) Из пункта 3) теоремы 1 и пункта 2) доказываемой теоремы следует замкнуть  $\mathcal{M}(A+B)$ . Отсюда, снова пользуясь пунктом 3) теоремы 1, получаем требуемое включение.

5) Пусть  $z \in \mathcal{R}(A+B)$  и  $\|z\| = 1$ ; тогда  $Q_A z = Ay$ , где  $y$  взят так, что  $\hat{A}Ay = y$ . Полагая  $x = U(B)y$ , будем иметь  $(A+B)x = z$ , откуда  $\|z - Ay\| < \varepsilon\|y\|$ , где  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $B \rightarrow 0$ . Но  $\|y\| \leq C_A\|Ay\| = C_A\|Q_A z\| \leq C_A\|Q_A\|$ ; следовательно,  $\|z - Ay\| < \varepsilon C_A\|Q_A\|$ . Этим показана близость  $\mathcal{R}(A+B)$  к  $\mathcal{R}(A)$ . Обратно, возьмем в  $\mathcal{R}(A)$  произвольный единичный элемент  $Ax$ , где  $x$  удовлетворяет соотношению  $\hat{A}Ax = x$ . Тогда  $\|(A+B)x - Ax\| = \|Bx\| \leq \|B\|\|x\| \leq \|B\|C_A$ , т. е.  $\mathcal{R}(A)$  близко к  $\mathcal{R}(A+B)$  (заметьте, что последнее установлено с использованием только замкнутости  $A$  и  $\mathcal{R}(A)$ ).

6), 7). Включения  $\mathcal{M}(A) \subseteq \mathcal{M}(A+B)$  и  $\overline{\mathcal{R}(A)} \subseteq \overline{\mathcal{R}(A+B)}$  имеют место без предположения о существовании оператора  $Q_A$ . Доказательство обратных включений основывается на том, что число  $C_H$ , отвечающее оператору  $H = A+B$ , можно взять в виде  $C_H = C_A\|Q_A\|(1 + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon \rightarrow 0$  при  $B \rightarrow 0$ .

Рассмотрим какую-либо банахову алгебру  $\mathfrak{B}$  операторов  $B \in L(X, X)$ , коммутирующих друг с другом и с некоторым фиксированным линейным замкнутым оператором  $A$ , действующим в банаховом пространстве  $X$ . Выделим в  $\mathfrak{B}$  множество  $\mathfrak{G}$ , состоящее из операторов  $B$  таких, что: 1)  $\mathcal{R}(A+B)$  замкнуто в  $X$ ; 2)  $\mathcal{N}(A+B) \subseteq \mathcal{M}(A+B)$ ; 3) в  $L(X, X)$  существует оператор проектирования  $Q_{A+B}$  пространства  $X$  на  $\mathcal{R}(A+B)$  (ср. с множеством  $\mathfrak{P}$  в <sup>(1a)</sup>). В силу пунктов 2), 4) и 3) теоремы 2 множество  $\mathfrak{G}$  открыто в  $\mathfrak{B}$ . Пусть  $G$  — какая-либо его связная компонента. Основываясь на теоремах 1) и 2), можно доказать следующую теорему.

**Теорема 3.** 1) Если  $B_1, B_2$  — операторы из  $G$ , то существует линейное взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение  $\mathcal{R}(A+B_1)$  на  $\mathcal{R}(A+B_2)$ ; тем самым размерность (в любом смысле) пространства  $\mathcal{R}(A+B)$  постоянна в  $G$ .

2) Размерности банаховых пространств  $\mathcal{N}(A+B)$ ,  $X/\mathcal{R}(A+B)$  и  $\mathcal{R}(A+B)^\perp$  постоянны в  $G$ .

3) Пространства  $\mathcal{M}(A+B)$  и  $\overline{\mathcal{R}(A+B)}$  постоянны, когда  $B$  пробегает  $G$ .

Остановимся в заключение на рассмотрении обоих множеств  $\mathfrak{P}$  и  $\mathfrak{G}$  в банаховой алгебре  $\mathfrak{B}$ . Пусть  $G_P \subseteq \mathfrak{P}$  и  $G_Q \subseteq \mathfrak{G}$  — связные компоненты этих множеств. Возникает вопрос: всегда ли  $G_P$  и  $G_Q$  совпадают, если их пересе-

чение не пусто? В случае, когда  $X$  — гильбертово пространство, этот вопрос снимается, ибо тогда  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{G}$  совпадают. В общем же банаховом пространстве  $X$  вопрос остается открытым, однако можно указать некоторые частные случаи положительного его решения. Пусть, например,  $G_p$  состоит из операторов с конечномерными пространствами нулей, а  $G_q$  — из операторов с конечномерными дополнениями к области значений; тогда размерности этих конечномерных пространств постоянны — каждая в своей компоненте. Если  $G_p \cap G_q \neq \emptyset$ , то указанные размерности конечны в объединении  $G_p \cup G_q$ , которое поэтому содержится одновременно в  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{G}$  и, следовательно, образует одну компоненту. Другим случаем положительного решения вопроса, охватывающим предыдущий, является тот, когда для всех точек компонент  $G_p$  и  $G_q$  рассматриваемые операторы проектирования можно выбрать так, чтобы их нормы были ограничены в совокупности.

Московский институт инженеров  
железнодорожного транспорта

Поступило  
28 V 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> М. А. Гольдман, С. Н. Крачковский, а) ДАН, 197, № 6 (1971); б) ДАН, 181, № 5 (1968).