

УДК 538.566.5

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

П. Е. КРАСНУШКИН

О СВОЙСТВАХ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛНОВОДАХ ВБЛИЗИ КРАТНОСТИ ВОЛНОВЫХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 1 VIII 1972)

1. Разобьем периодический волновод сечениями $S_j (z_j = z_0 + jD)$, нормальными к оси z , на идентичные ячейки $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm R$. Для стационарного волнового процесса частоты ω ($\exp(-i\omega t)$), согласно (1), уравнение для комплексных амплитуд тангенциальных компонент электромагнитного поля $E_\tau(q, j)$ и $H_\tau(q, j)$, $q \in S_j$, будет

$$\mathcal{A}Z(q, j) - Z(q, j+1) = Z^0(q, j), \quad (1)$$

где Z — вектор-функция с компонентами E_τ и iH_τ , Z^0 — заданная вектор-функция внешнего воздействия, $\mathcal{A}$ — линейный оператор, преобразующий $Z(q)$ на входном сечении ячейки в $Z(q)$ на выходном сечении ячейки для $Z \in \mathcal{L}_2$. Область определения $D(\mathcal{A})$ плотна в $\mathcal{L}_2$.

Средний за период поток мощности P в сечении ячейки S определяется через скалярное произведение

$$P = \frac{ci}{16\pi} (\mathfrak{I}Z, Z), \quad \text{где } \mathfrak{I} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{E} \\ \mathcal{E} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$\mathcal{E}$ — оператор тождественного преобразования, c — скорость света.

Задача состоит в отыскании $Z(q, j)$, являющегося единственным решением (1) при краевых условиях $E_\tau(q, \pm R) = \mathfrak{Z}_\pm H_\tau(q, \pm R)$ и при заданной функции $Z^0(q, j)$; $\mathfrak{Z}_\pm$ — линейные импедансные операторы, введенные в (1). Подчиним их условиям: 1) $P > 0$ для $\mathfrak{Z}_+$ и $P < 0$ для $\mathfrak{Z}_-$ при любых $H_\tau(q) \in \mathcal{L}_2$; 2) существует оператор, обратный $\Delta = \mathfrak{Z}_+(j) - \mathfrak{Z}_-(j)$, где $\mathfrak{Z}_\pm(j)$ — операторы импедансов, пересчитанные с концов цепочки $j = \pm R$ в любую ячейку номера j (см. п. 3 в (1)); 3) выполнены условия (3) (см. ниже).

Пусть $\mathcal{A}'$ — часть оператора $\mathcal{A}$ с инвариантным подпространством $\mathcal{L}^N$, в котором существует базис, составленный из собственных функций $F_l (E_\tau^l(q), H_\tau^l(q))$, $l = 1, 2, 3, \dots, N$, оператора ячейки $\mathcal{A}$. Для этих функций имеет место условие биортонормированности $(F_l, G_l) = N_l \delta_{lm}$, где G_m — собственные функции оператора $\mathcal{A}^*$, сопряженного $\mathcal{A}$, δ_{lm} — символ Кронекера, N_l — нормирующий множитель.

Разделим множество собственных значений оператора $\mathcal{A}$ на $\{\lambda_{l+}\}$ и $\{\lambda_{l-}\}$, для которых $P_l > 0$ и $P_l < 0$, где $P_l = i(\mathfrak{Z}F_l, F_l)$ (разделение для $P_l = 0$ дано ниже). Условие 3) состоит в выполнении равенств

$$E_\tau^{l+} = \mathfrak{Z}_+ H_\tau^{l+} \text{ для всех } l+, \quad E_\tau^{l-} = \mathfrak{Z}_- H_\tau^{l-} \text{ для всех } l-. \quad (3)$$

При указанных краевых условиях решением (1) для $Z^0 = Z^0(q) \delta_{jj'}$, $Z^0 \in \mathcal{L}^N$, будет

$$\begin{aligned} Z(q, j) &= \sum_{l+} Z_{l+}^0 F_{l+}(q) \lambda_{l+}^{(j-j')}, \quad j > j'; \\ Z(q, j) &= \sum_{l-} Z_{l-}^0 F_{l-}(q) \lambda_{l-}^{(j-j')}, \quad j < j', \end{aligned} \quad (4)$$

где $Z_{l+}^0 = (Z_+^0, G_{l+}) / N_{l+}$, $Z_{l-}^0 = (Z_-^0, G_{l-}) / N_{l-}$; Z_+^0 и Z_-^0 — компоненты Z^0 , разделяемые по методу п. 3 (1).

Каждый член суммы (4) — это нормальная волна, характеризующаяся формой $F_l(q)$, волновым множителем λ_l , коэффициентом возбуждения $(Z_l^0)^{1/2}$ и типом (+ и -). $|\lambda_l|$ определяет отношение амплитуд, а $\arg \lambda_l$ — разность фаз смежных ячеек в волне номера l . При $|R| \rightarrow \infty$ (4) является разложением по нормальным волнам в бесконечном волноводе.

2. Пусть $\mathcal{A}'$ зависит от комплексных параметров $w_1, w_2, \dots, w_n$, являющихся координатами точки w евклидова пространства C^n , и в области $\mathcal{G} \subset C^n$ зависимости $\lambda_l(w_1, w_2, \dots, w_n)$, $l = 1, 2, 3, \dots, N$, будут ветвями N -значной аналитической функции $\lambda(w): \mathcal{L}^N$ инвариантно в $\mathcal{G}$. Согласно (2), будем изучать $\lambda(w)$ с помощью путей $\mathcal{L}(s, \mu)$ в $\mathcal{G}$, покрывающих гомотопию некоторую поверхность S (s — параметр пути, определяющий точку w на нем, а μ — индекс пути, выделяющий данный путь из семейства). Каждому пути на плоскости λ функция $\lambda(w)$ сопоставляет N ветвей $\lambda_l[\mathcal{L}]$. Их структура определяется окрестностями $\mathcal{U}(w^p)$ точек кратности w^p собственных значений λ_l , где ветви $\lambda_l[\mathcal{L}]$ пересекаются (p — порядок кратности). На путях, проходящих в $\mathcal{U}(w^p)$, происходит трансформация форм волн. При небольших изменениях μ вблизи $\mu_{кр}$, при котором путь проходит через w^p , конфигурация ветвей и тип трансформации резко изменяются, что исключает классификацию волн по непрерывности s . Изучение $\lambda(w)$ в $\mathcal{U}(w^p)$ следует проводить в C^p .

3. Для изучения $\lambda(w)$ в $\mathcal{U}(w^2)$ выделим $\mathcal{A}'$ с $\mathcal{L}^2$ и, введя в $\mathcal{L}^2$ базис $\{e_1(q), e_2(q)\}$, представим $\mathcal{A}'$ (2×2) -матрицей $[a_{ik}(w_1, w_2)]$; $i, k = 1, 2$. Волновые множители интересующих нас нормальных волн будут

$$2\lambda_{1,2} = (a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}, \quad (5)$$

а формы волн определяются собственными векторами $F_{1,2}$ матрицы $\mathcal{A}'$. В качестве w_1 и w_2 возьмем $\delta = a_{11} - a_{22}$ и $l = 2\sqrt{a_{12}a_{21}}$, считая $a_{11} + a_{22} = 2\lambda_0 = \text{const}$. В точке $w_{\delta^2}(\delta = 0, l = 0)$ $\mathcal{A}'$ может быть диагонализирована, при этом $e_1 = F_1(q)$, а $e_2 = F_2(q)$. w_{δ^2} в C^2 не изолирована: на прямых $\delta = \pm il$, пересекающихся в w_{δ^2} , лежат точки w_{δ} в которых $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ сливаются и $\mathcal{A}'$ можно придать жорданову форму. Введем два экземпляра C^2 : C_1^2 и C_2^2 , соединив их поверхностью разреза S_c , проходящей через $\delta = il$ и $\delta = -il$. На путях $\mathcal{L}$, пересекающих S_c , происходит преобразование форм волн (см. (2)).

Рассмотрим несколько характерных семейств $\mathcal{L}(s, \mu)$ в $\mathcal{U}(w_{\delta^2})$:

Случай 1. $S_{\mathcal{L}}$ пересекает одну из прямых $\delta = \pm il$, т. е. точку w_{δ^2} . Рассматривая $S_{\mathcal{L}}$ как C^1 с параметрами $w' = s$ и $w'' = \mu$, представим (5) в виде

$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 + cw \pm \text{const} \sqrt{w}, \quad w = w' + iw''.$$

Ветви $\lambda_{1,2}[\mathcal{L}]$ имеют вид гипербол (см. рис. 1а (2)), разделенных сепаратриссами S_1 и S_2 при $w'' = \mu_{кр} = 0$. При $w \rightarrow w_{\delta^2}$ N_1 и N_2 стремятся к 0, а коэффициенты возбуждения — к ∞ . Сумма этих волн в $\mathcal{U}(w_{\delta^2})$ дает пространственные биения с амплитудой $\sin[\Delta\lambda(j-j')]/\Delta\lambda$, $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. При $w \rightarrow w_{\delta^2}$, когда $\Delta\lambda \rightarrow 0$, возникает суммарная волна с линейно растущей амплитудой вдоль оси z . Ее можно получить непосредственно из (1) для $w = w_{\delta^2}$, если вместо пропавшей собственной функции F_2 ввести присоединенную F_{12} . Тогда, согласно (2, 3),

$$\frac{(Z_1^0, G_{11})}{(F_{11}, G_{11})} F_{11}(q) \lambda_0^{(j-j')} + \frac{(Z_2^0, G_{12})}{(F_{12}, G_{12})} [F_{12}(q) + (j-j') F_{11}(q)] \lambda_0^{(j-j')}, \quad (6)$$

где $F_{11} = F_1$ и F_{12} удовлетворяют уравнениям $\mathcal{A}' F_{12} - \lambda_0 F_{12} = F_{11}$ и $\mathcal{A}' F_{11} - \lambda_0 F_{11} = 0$; G_{11} и G_{12} — собственная и присоединенная функция $\mathcal{A}'$, Z_1^0 и Z_2^0 — компоненты Z^0 , разделенные по методу п. 3 (1). Первый член в

(6) — это нормальная, а второй — присоединенная волна. Обе волны могут быть возбуждены независимо друг от друга. Присоединенная волна характеризуется линейным парастанием амплитуды. Она возникает лишь для точек w^2 , в которых сходятся λ_1 и λ_2 одного типа (+ или -). При переходе через $\mu = 0$ ветви резко изменяют конфигурацию и происходит смена трансформации волн.

Случай 2. S проходит через обе прямые $\delta = \pm il$ и $\mu = |l|$. Тогда для любого μ , кроме $\mu = 0$, ветви $\lambda_i[\mathcal{L}]$ проходят последовательно через точки $\lambda(w_{\mathcal{L}1}^2)$ и $\lambda(w_{\mathcal{L}2}^2)$, являясь усами соответствующих сепаратрис S_1 и S_2 случая 1. Преобразование волн в w_2 компенсируется обратным преобразованием в $w_{\mathcal{L}2}^2$.

Случай 3. $S_{\mathcal{L}}$ проходит через w_{π}^2 и пересекает S_c по некоторой линии, не совпадающей с $\delta = \pm il$ (см. рис. 1в работы (2)). На ветвях $\lambda_i[\mathcal{L}(s, \mu) = |l|]$ при $\mu = 0$ преобразования нет. Оно возникает скачком при $\mu \neq 0$. При всех значениях s и μ существует две нормальных волны (рис. 1г (2)).

4. В консервативном волноводе, по определению, $P(S_{\text{вх}}) = P(S_{\text{вых}})$ и

$$(\mathfrak{Z}\mathcal{Z}, Z) = (\mathfrak{Z}\mathcal{A}Z, \mathcal{A}Z), \quad (7)$$

т. е. оператор $\mathcal{A}$ будет $\mathfrak{Z}$ -изометрическим. Для него характерны

Свойство 1. Нормальные волны с $|\lambda_i| \neq 1$ не несут энергии ($P = 0$). Комплексные волны ($|\lambda_i| \neq 1$, $\arg \lambda_i \neq 0, \pi$) имеют конечные безваттные потоки.

Свойство 2. Волны с $|\lambda_i| \neq 1$ образуют сопряженные пары номеров $l+$ и $l-$, для которых $\lambda_{l+}\bar{\lambda}_{l-} = 1$, $F_{l+} = \mathfrak{Z}G_{l-}$ и $F_{l-} = \mathfrak{Z}G_{l+}$, $N_{l+} = -\bar{N}_{l-}$, где G_{l+} и G_{l-} — собственные функции оператора $\mathcal{A}^*$, знак + отнесен к $|\lambda_i| < 1$, а знак — к $|\lambda_i| > 1$.

Из свойств 1 и 2 следует, что в точке w^2 , образованной λ_{l+} и λ_{l-} , сходящимися на линии $|\lambda| = 1$, $F_l = \mathfrak{Z}G_l$. Поэтому для них $P_l = N_l$. Так как в точке w и только в ней $P_l = 0$, то имеет место

Свойство 3. Необходимым и достаточным признаком жордановости точки w^2 на линии $|\lambda| = 1$ является условие $P_l = 0$.

Если в качестве параметра w взять частоту ω , положив $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_0' + \omega B'$, то, учитывая, что на путях $\mathcal{L}(\omega', \omega'' = 0)$ условие (7) не нарушается, получим

Свойство 4. Ветви $\lambda_i[\mathcal{L}(\omega', \omega'' = 0)]$, сходящиеся к точке w^2 вдоль линии $|\lambda| = 1$ при $\omega' = \omega_{\mathcal{L}}$, характеризуются условием $\frac{d}{d\omega} [\arg \lambda_i] \rightarrow \infty$.

При переходе через значение $\omega' = \omega_{\mathcal{L}}$ происходит преобразование затухающих волн в затухающие и ветви λ_i сходят с окружности $|\lambda| = 1$ под прямым углом. ω разделяют полосы пропускания и запрета. Присоединенные волны в точках $(w_{\mathcal{L}}^2)$, лежащих на линии $|\lambda| = 1$, не возникают.

Если ячейки подчинить принципу взаимности, потребовав выполнения условия $\mathcal{A}_{22}\bar{\mathcal{A}}_{11} - \mathcal{A}_{21}\mathcal{A}_{12} = \mathcal{E}$, $\mathcal{A}_{11} = \mathcal{A}_{12}^{-1}\mathcal{A}_{11}\mathcal{A}_{12}$ для блоков $\mathcal{A}$, то получим

Свойство 5. В волноводах с «взаимными» ячейками существуют пары нормальных волн, сопряженных условием $\lambda_{l+}\lambda_{l-} = 1$ (см. (1)).

5. Расчетные примеры. 1) В (4), где матрица $\mathcal{A}'$ строится методом частичных областей, рассчитаны ветви $\lambda_i[\mathcal{L}(\omega', a)]$ для диафрагмированного консервативного волновода (a — радиус отверстия в диафрагме) в $\mathcal{U}[w_{\pi}^2(\omega', a = 0)]$; $\lambda(w_{\pi}^2)$ лежат на линиях $|\lambda| = 1$ и $\text{Im } \lambda = 0$. В $\mathcal{U}(w_{\pi}^2)$ происходит изменение числа узлов по радиусу и длине ячейки и, согласно рис. 3 из (4), возникает обмен форм между двумя нормальными волнами. Ситуация аналогична случаю 3 из п. 3, если сопоставить ω' с δ , а a с $|l|$. Кривые рис. 3 из (4) проведены через расчетные точки неверно: они должны иметь дисперсию одного типа.

2) В (⁵⁻⁷) периодический волновод аппроксимируется системой обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, исследованной еще Флоке, Ляпуновым и Пуанкаре, а затем в работах (^{8, 9}). При таком подходе матрица ячейки представляется матрицей монодромии и λ_i являются мультипликаторами уравнения Флоке. В (⁷) рассчитаны ветви $\lambda_i[\mathcal{L}(\omega', \kappa)]$ для волновода с гофрированной поверхностью (κ — глубина гофра) в $\mathcal{U}(w_d^2)$, $\lambda(w_d^2)$ лежит на $|\lambda| = 1$ в точке (ω_d', κ_d) . При $\kappa \neq \kappa_d$ она расщепляется на две точки типа w_d^2 . Для рассмотренных путей имеет место ситуация, аналогичная случаю 2 из п. 3, т. е. проходятся последовательно обе жордановы точки. При этом две нормальных волны из полосы пропускания попадают в полосу запрета, а затем возвращаются в полосу пропускания (рис. 2, 3 из (⁷)).

Примечание при корректуре. Расчетные примеры 1) и 2) являются иллюстрацией следующего свойства.

Свойство 6. Если w_d^2 , $\omega = \omega_d$, $\eta = \eta_d$, лежит на окружности $|\lambda| = 1$, то в консервативных волноводах возможны только два случая ее расщепления на две жордановы точки при $\eta \neq \eta_d$:

1) они сходят с окружности внутрь и наружу круга, и между волнами одного типа (+ или -) возникает обмен формами, связанный с изменением числа узлов;

2) они остаются на окружности, и для волн разных типов в полосе пропускания возникает полоса запрета.

Нестабильность случая 1) в работах (^{8, 9}) не рассматривалась.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
4 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Е. Краснушкин, Радиотехн. и электроника, **10**, 7, 1214 (1965). ² П. Е. Краснушкин, Е. Н. Федоров, Радиотехн. и электроника, **17**, 6, 1129 (1972). ³ И. И. Голицев, П. Е. Краснушкин, Теоретич. и матем. физ., **10**, 3, 370 (1972). ⁴ П. Е. Краснушкин, С. П. Ломцев, Радиотехн. и электроника, **11**, 6, 1051 (1966). ⁵ Р. Е. Краснушкин, J. Phys. USSR, **10**, № 5, 434 (1946). ⁶ В. И. Короза, Радиотехн. и электроника, **15**, 3, 450 (1970). ⁷ В. И. Короза, А. Г. Трагов, Ю. П. Шанкин, Радиотехн. и электроника, **16**, 10, 1788 (1971). ⁸ М. Г. Крейн, Сборник. Памяти А. А. Андропова, Изд. АН СССР, 1955, 413. ⁹ И. М. Гельфанд, В. Б. Лидский, УМН, **10**, 1, 3 (1955).