

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

УДК 539.12.01

Ю.А. ГРИШЕЧКИН, В.Н. КАПШАЙ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАДАЧ О СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ СИСТЕМ ДВУХ БЕССПИНОВЫХ ЧАСТИЦ

Найдены численные решения уравнений квантовой теории поля, описывающих связанные s -состояния систем двух скалярных частиц в следующих трёх случаях: для потенциала однобозонного обмена, суперпозиции таких потенциалов, а также для потенциала Кулона в релятивистском конфигурационном представлении. На основе этих решений получены формфакторы упругого рассеяния и константы распада двухчастичных систем на два фотона. Показано, что число нулей упругих формфакторов совпадает с числом нулей волновых функций и равно номеру квантового состояния системы минус один. Проведено сравнение полученных спектров энергии и констант распада с экспериментально измеренными величинами для позитрония.

Ключевые слова: двухчастичное релятивистское уравнение, потенциал однобозонного обмена, потенциал Кулона, функция Грина, метод итераций, связанное состояние, формфактор, константа распада, позитроний.

Введение

Двухчастичные уравнения квантовой теории поля квазипотенциального типа были получены в импульсном представлении (ИП) в виде интегральных [1, 2]. Затем для них было найдено релятивистское конфигурационное представление (РКП) [3], которое, фактически, является релятивистским обобщением обычного координатного представления квантовой механики. Одним из преимуществ РКП перед ИП является прозрачность физического смысла входящих в уравнения потенциалов. Так, например, вид потенциала в РКП по аналогии с квантовой механикой может указывать на существование связанных или резонансных состояний. Кроме того, аналитические выражения для упругих формфакторов и констант распада через волновые функции (ВФ) в РКП имеют более простой вид, чем через волновые функции в ИП [4–7].

В РКП двухчастичные уравнения могут быть сформулированы в виде разностных или интегральных [3]. Точное решение таких уравнений возможно лишь в некоторых случаях [8–10]. В связи с этим возникает необходимость численного решения двухчастичных уравнений. Вычислительные схемы решения интегральных уравнений [11, 12] разработаны гораздо лучше, чем разностных. При этом решение интегральных уравнений не связано с проблемой i -периодического множителя, возникающей при решении разностных уравнений. Поэтому интегральная формулировка релятивистских двухчастичных уравнений имеет преимущество по сравнению с разностной.

В работе рассматривается численное решение интегральных уравнений квантовой теории поля, описывающих связанные s -состояния системы двух бесспиновых частиц одинаковой массы [13] в случае потенциала однобозонного обмена, полученного в рамках подхода, основанного на использовании квазипотенциального уравнения для амплитуды рассеяния, заданной фейнмановскими диаграммами [3], суперпозиции таких потенциалов [14] и потенциала Кулона в РКП. На основании полученных решений рассчитаны также формфакторы упругого рассеяния и константы распада систем двух скалярных частиц на два фотона. Выполнено сравнение найденных в таком простом, не учитывающем спин входящих в систему частиц подходе спектров энергии и констант распада с результатами экспериментальных измерений для позитрония.

Интегральные уравнения в релятивистском конфигурационном представлении

В РКП двухчастичные интегральные уравнения имеют следующий вид [13]:

$$\psi^{(j)}(w, r) = -\lambda \int_0^\infty dr' g^{(j)}(w, r, r') V(r') \psi^{(j)}(w, r'), \quad r \geq 0, \quad (1)$$

где индекс $j = 1, 2, 3, 4$ соответствует четырём вариантам уравнений: $j = 1$ ($j = 3$) – уравнение Лоргунова – Тавхелидзе (модифицированное), $j = 2$ ($j = 4$) – уравнение Кадышевского (модифици-

рованное). Величина $\psi^{(j)}(w, r)$ в уравнениях – волновая функция, $g^{(j)}(w, r, r')$ – функция Грина соответствующего уравнения, $V(r)$ – потенциал, r – модуль радиус-вектора в РКП, параметр $w \in [0, \pi/2)$ связан с энергией системы $2E$ соотношением $2E = 2m \cos w$ (m – масса каждой частицы) [13], $\lambda > 0$ – константа связи. В ИП функции Грина имеют вид [1 – 3]

$$G^{(1)}(w, \chi) = [\text{ch}^2 \chi - \cos^2 w]^{-1}, \quad G^{(2)}(w, \chi) = [2 \text{ch} \chi (\text{ch} \chi - \cos w)]^{-1}, \quad (2)$$

$$G^{(3)}(w, \chi) = \text{ch} \chi [\text{ch}^2 \chi - \cos^2 w]^{-1}, \quad G^{(4)}(w, \chi) = [2(\text{ch} \chi - \cos w)]^{-1},$$

где χ – быстрота, связанная с импульсом p соотношением $p = m \text{sh} \chi$. Функции Грина (2) могут быть приведены в РКП посредством преобразования [3], которое для s -волн сводится к следующему виду:

$$g^{(j)}(w, r, r') = -2/(\pi m) \int_0^\infty \sin(\chi m r) G^{(j)}(w, \chi) \sin(\chi m r') d\chi. \quad (3)$$

Вычисление интегралов (3) с импульсными ФГ (2) приводит к четырём функциям Грина в РКП $g^{(j)}(w, r, r') = g^{(j)}(w, r - r') - g^{(j)}(w, r + r')$, где [8, 9, 13]

$$g^{(1)}(w, r) = \frac{-1}{m \sin 2w} \frac{\text{sh}[(\pi/2 - w)mr]}{\text{sh}[\pi m r/2]}, \quad g^{(3)}(w, r) = \frac{-1}{2m \sin w} \frac{\text{ch}[(\pi/2 - w)mr]}{\text{ch}[\pi m r/2]}, \quad (4)$$

$$g^{(2)}(w, r) = \frac{(4m \cos w)^{-1}}{\text{ch}[\pi m r/2]} - \frac{1}{m \sin 2w} \frac{\text{sh}[(\pi - w)mr]}{\text{sh}[\pi m r]}, \quad g^{(4)}(w, r) = \frac{-1}{2m \sin w} \frac{\text{sh}[(\pi - w)mr]}{\text{sh}[\pi m r]}.$$

Мы будем рассматривать потенциалы, не зависящие от энергии системы, поэтому условие нормировки волновых функций запишется в РКП в следующей (одинаковой для всех j) форме:

$$\int_0^\infty dr (\psi^{(j)}(w, r))^2 = 1, \quad (5)$$

что аналогично нерелятивистскому условию нормировки.

Метод решения

Решения уравнений (1) найдены методом составных квадратур Гаусса [12]. Заменив верхний бесконечный предел в этих уравнениях некоторой большой величиной R , выбранной исходя из требования к точности решений, и представив интеграл в виде суммы N интегралов, получим

$$\psi^{(j)}(w, r) = -\lambda \sum_{k=1}^N \int_{r_{k-1}}^{r_k} dr' g^{(j)}(w, r, r') V(r') \psi^{(j)}(w, r'), \quad (6)$$

где $r_k = r_{k-1} + h_k$; $r_0 = 0$; $r_N = R$; h_k – шаг. В уравнениях (6) каждый интервал $r \in [r_{k-1}, r_k]$ приведём к интервалу $x \in [-1; 1]$ посредством замены переменной $r = f_k(x) = h_k x/2 + (r_k + r_{k-1})/2$ и к полученным интегралам применим квадратурную формулу Гаусса с M узлами [11, 12]. В результате получим выражения (x_i , C_i – узлы и веса квадратур Гаусса на интервале $x \in [-1; 1]$)

$$\psi^{(j)}(w, r) = -\lambda \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^M h_k C_i / 2 g^{(j)}(w, r, f_k(x_i)) V(f_k(x_i)) \psi^{(j)}(w, f_k(x_i)). \quad (7)$$

Взяв формулу (7) в точках $r_{s,l} = f_s(x_l) = h_s x_l/2 + (r_s + r_{s-1})/2$, получим однородные системы линейных алгебраических уравнений, которые после приведения их основных матриц к симметричной форме имеют следующий вид ($p = M(s-1) + l$, $q = M(k-1) + i$):

$$\sum_{q=1}^{N \cdot M} K_{pq}^{(j)}(w) \varphi_q^{(j)} = \lambda^{-1} \varphi_p^{(j)}; \quad K_{pq}^{(j)}(w) = -\sqrt{A_p} g_{pq}^{(j)}(w) \sqrt{A_q}, \quad (8)$$

где $\varphi_p^{(j)} = \sqrt{A_p} \psi^{(j)}(w, f_s(x_l))$; $g_{pq}^{(j)}(w) = g^{(j)}(w, f_s(x_l), f_k(x_i))$; $A_q = h_k C_i V(f_k(x_i))/2$. Применение к основным матрицам систем уравнений (8) стандартных методов, например QR-метода [11, 12], даёт собственные значения константы связи λ для конкретного значения энергии $2E$.

В случае, когда требуется искать собственные значения энергии $2E$ (величины w) для фиксированной константы связи λ , возникает необходимость решения нелинейной задачи на собственные значения для систем уравнений (8). Для решения такой задачи использовался метод итераций. Этот метод был применён в работе [15] при решении задачи на собственные значения для двухчастичного релятивистского интегрального уравнения в ИП с зависящим от энергии потенциалом. В данной работе используется аналогичный метод для нахождения собственных значений энергии интегральных уравнений в РКП (1). Изложим кратко суть этого метода. Представим системы алгебраических уравнений (8) в виде $(p = \bar{1}; N \cdot \bar{M}, q = \bar{1}; N \cdot \bar{M})$

$$\tilde{K}^{(j)}(w)\varphi^{(j)} = \sin(w)\varphi^{(j)}; \quad \tilde{K}_{pq}^{(j)}(w) = -\lambda\sqrt{A_p}\tilde{g}_{pq}^{(j)}(w)\sqrt{A_q}, \quad (9)$$

где $\varphi_p^{(j)} = \sqrt{A_p}\psi^{(j)}(w, f_s(x_l))$; $\tilde{g}_{pq}^{(j)}(w) = \sin(w)g^{(j)}(w, f_s(x_l), f_k(x_i))$; $A_q = h_k C_i V(f_k(x_i))/2$. Для рассматриваемого состояния выберем некоторое начальное приближение величины $w^{(0)}$ (энергии $2E^{(0)} = 2m \cos w^{(0)}$) и вычислим дальнейшие приближения по формулам

$$\tilde{K}^{(j)}(w^{(s)})\varphi^{(j)} = \sin(w^{(s+1)})\varphi^{(j)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Для определения собственных значений матриц $\tilde{K}^{(j)}(w^{(s)})$ можно использовать стандартные методы [11, 12]. Процесс (10) продолжается до выполнения условия $|w^{(s+1)} - w^{(s)}| \leq \varepsilon$, где ε – требуемая точность нахождения собственных значений матрицы.

Контроль точности нахождения собственных значений осуществлялся параллельным решением уравнений в РКП (1) и соответствующих им уравнений в ИП:

$$\psi^{(j)}(w, \chi) = 2\lambda/(\pi m) G^{(j)}(w, \chi) \int_0^\infty d\chi' V(\chi, \chi') \psi^{(j)}(w, \chi'), \quad \chi \geq 0, \quad (11)$$

где величины $\psi^{(j)}(w, \chi)$, $V(\chi, \chi')$ связаны с соответствующими величинами в РКП выражениями

$$\psi^{(j)}(w, r) = \int_0^\infty d\chi \sin(\chi mr) \psi^{(j)}(w, \chi); \quad V(\chi, \chi') = \int_0^\infty dr \sin(\chi mr) V(r) \sin(\chi' mr). \quad (12)$$

Решения интегральных уравнений в ИП (11) также были найдены описанным выше способом.

Решения для потенциала однобозонного обмена

Рассмотренный метод был использован нами для решения интегральных двухчастичных уравнений в случае различных аналитических потенциалов. Однако этот метод может быть эффективно применен для решения этих уравнений и в случае сингулярных в РКП потенциалов.

Найдём решение для потенциала однобозонного обмена [3], имеющего в РКП и ИП вид

$$V(r) = \frac{\text{ch}(\pi - \alpha)mr}{r \text{sh} \pi mr}, \quad V(\chi, \chi') = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\text{ch}(\chi + \chi') - \cos \alpha}{\text{ch}(\chi - \chi') - \cos \alpha} \right), \quad (13)$$

где параметр α связан с массой обменного скалярного бозона μ (при $\mu \leq 2m$) соотношением $\cos \alpha = 1 - \mu^2/2m^2$. Потенциал (13), как нетрудно видеть, является релятивистским обобщением квантово-механического потенциала Юкавы $\exp(-\beta r)/r$ (в нерелятивистском пределе $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha m = \beta$, r – координата в обычном координатном представлении). Основным отличием релятивистского потенциала (13) от нерелятивистского является более сильная сингулярность первого при $r = 0$.

В качестве иллюстрации применения рассмотренного метода на рис. 1 приведены собственные значения энергии, найденные при $m = 1$, $\mu = 0,5$. Собственные значения константы связи λ , определённые решением уравнений в РКП и ИП, для всех j совпадают с точностью до 10^{-9} для первого (основного) состояния, 10^{-8} – для второго состояния, 10^{-7} – для третьего и 10^{-6} – для четвёртого. При этом для достижения требуемой точности решений уравнений в ИП необходимо большее число N для фиксированного значения R , чем при решении уравнений в РКП, т.е. для

решения интегральных уравнений в РКП метод составных квадратур Гаусса более эффективен. На рис. 2 приведены ВФ для $j=1$ и 4 при $\lambda=1,5$. Здесь и на рис. 3 номер кривой равен номеру состояния, при этом мы не приводим графики для всех j , так как они не имеют принципиальных отличий. Видно, что ВФ основных состояний не имеют нулей при $r \neq 0$, ВФ вторых состояний имеют один ноль, а ВФ третьих состояний – два нуля. Расчёты для следующих состояний показывают, что для всех рассматриваемых здесь уравнений количество нулей ВФ при $r \neq 0$ равно «порядковому номеру состояния минус один». Аналогичным свойством обладают ВФ в импульсном представлении. В нерелятивистской теории ВФ связанных систем обладают таким же свойством, и оно доказывается в виде теоремы [16]. В релятивистской теории такое доказательство нам неизвестно.

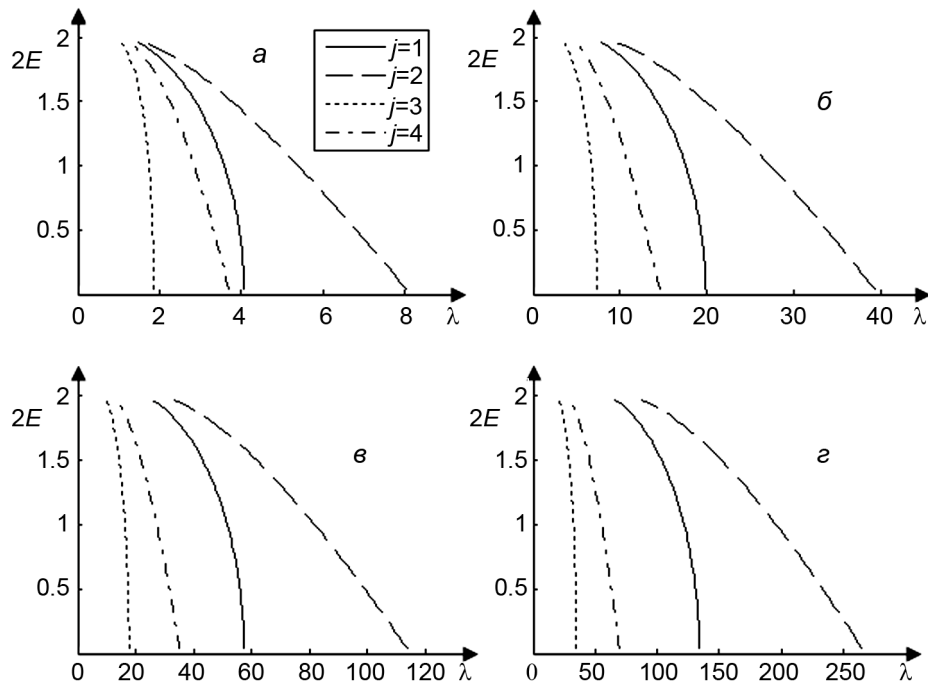


Рис. 1. Собственные значения энергии для потенциала однобозонного обмена: a – первые (основные) состояния; $б$ – вторые состояния; $в$ – третьи состояния; $г$ – четвёртые состояния

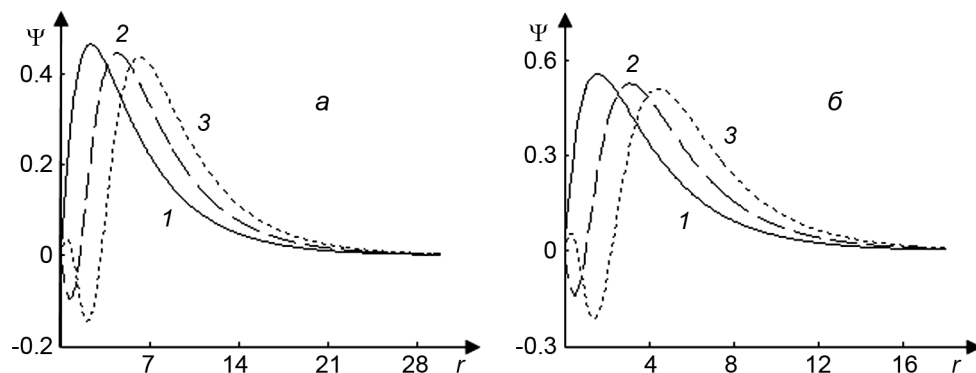


Рис. 2. Волновые функции для потенциала однобозонного обмена: a – $j=1$; $б$ – $j=4$

Решение для слабосвязанных систем в случае безмассового обменного бозона

Рассмотрим теперь решение уравнений (1) с потенциалом (13) при $\mu=0$ для малых значений w (слабосвязанные системы). Этот случай представляет интерес для изучения, так как его можно использовать, например, для описания электромагнитного взаимодействия между частицами в приближении «скалярного фотонобмена». При нулевой массе обменного бозона потенциал

(13) в РКП при больших r ведёт себя как r^{-1} соответственно, в ИП этот потенциал становится сингулярным при $\chi = \chi'$. Кроме того, при $w \rightarrow 0$ функции Грина в РКП (4) становятся медленно убывающими с ростом r (или r'). Всё это означает, что для решения интегральных уравнений с требуемой точностью необходимо увеличивать числа R и N , т.е. эффективность метода снижается. Поэтому в случае медленно убывающих с ростом r' потенциалов, таких, как (13) при $\mu = 0$ или потенциал Кулона, требуется модификация рассмотренного метода.

При решении уравнений (1) в случае безмассового бозонообмена для слабосвязанных систем была использована замена переменной $wr = x$. После такой замены ядра уравнений при $x \rightarrow \infty$ убывают достаточно быстро, и для их решения можно эффективно применять метод составных квадратур Гаусса с небольшим количеством узлов. Метод был опробован для решения модифицированного уравнения Логанова – Тавхелидзе в случае потенциала

$$\lambda V(r) = \lambda r^{-1} \operatorname{th}(\pi m r / 2), \quad (14)$$

допускающего точные решения [8] и имеющего при больших r одинаковую с (13) при $\mu = 0$ асимптотику λr^{-1} . Потенциал (14) является разностью двух потенциалов однобозонного обмена (13) при $\mu = 2m$ и 0. Условие квантования энергии в этом случае имеет вид [8]

$$2E_n = \sqrt{4m^2 - \lambda^2/n^2} - 2m, \quad n = 1, 2, \dots \quad (15)$$

При численном решении уравнения константа связи λ была выбрана равной постоянной тонкой структуры: $\lambda = 7,2973525698 \cdot 10^{-3}$ [17], что, как нетрудно видеть из условия (15), соответствует энергии, близкой к $2m$ ($w \approx 0,0036$). Из табл. 1, где приведены результаты численного решения, видно, что после предложенной замены переменной можно эффективно решать интегральные уравнения методом составных квадратур Гаусса.

Таблица 1

Собственные значения $2E/m - 2$ связанного состояния для потенциала (14)

№ состояния n	Точное значение $\cdot 10^{-5}$	Приближённое значение $\cdot 10^{-5}$				
		$N = 50$	$N = 100$	$N = 200$	$N = 400$	$N = 800$
1	-1,331288	-1,333222	-1,331751	-1,331375	-1,331300	-1,331288
2	-0,332821	-0,333782	-0,333048	-0,332860	-0,332823	-0,332817
3	-0,147920	-0,148488	-0,148001	-0,147876	-0,147850	-0,147846
4	-0,083205	-0,083111	-0,082741	-0,082644	-0,082625	-0,082622

Экспериментально была измерена разность энергий основного и второго (первого возбуждённого) состояния ортопозитрония [18]: $1233607216,4(3,2)$ МГц. Отметим, что спин ортопозитрония равен единице, а спин парапозитрония – нулю, т.е. скалярная модель, рассматриваемая в работе, предпочтительнее для парапозитрония, однако из опыта известна частота перехода для ортопозитрония, поэтому мы сравниваем результаты вычислений с экспериментальными данными именно для него. В табл. 2 приведены значения частоты перехода между уровнями энергии, полученными при решении уравнений (1) с потенциалами (13), (14) и потенциалом Кулона.

Частота перехода из первого возбуждённого состояния в основное, полученная при решении уравнения Шрёдингера с потенциалом Кулона, $\mu = 0,5$. Частота перехода, рассчитанная исходя из условия квантования энергии (15), равна 12336958685 МГц. Сравнение приведенных результатов показывает, что наилучшее совпадение с экспериментально измеренным значением даёт результат, полученный при решении уравнения Кадышевского с потенциалом (14).

Таблица 2

Частота перехода между основным и вторым состоянием

j	N	$r^{-1} \operatorname{th}(\pi mr/2)$, МГц	$r^{-1} \operatorname{cth}(\pi mr)$, МГц	r^{-1} , МГц
1	400	1233673256	12336956443	12336886274
	800	1233673569	12336954153	12336880641
2	400	1233651095	12336734637	12336664665
	800	1233651664	12336735112	12336661596
3	400	1233708292	12337306742	12337236596
	800	1233701226	12337230675	12337157181
4	400	1233682565	12337049503	12336979345
	800	1233679188	12337010316	12336936813

Упругие формфакторы и константы распада

В качестве примера использования найденных ВФ в РКП рассмотрим результаты вычисления формфакторов упругого рассеяния и констант распада двухчастичной системы на два фотона.

В работе [4] упругий формфактор был определён через матричный элемент оператора тока между двумя связанными s -состояниями двух скалярных частиц, выраженный через ВФ, удовлетворяющий квазипотенциальному уравнению. Гамильтониан взаимодействия в этом случае

$$H(x) = -e\varphi_1^+(x)\varphi_1(x)A(x) - e\varphi_2^+(x)\varphi_2(x)A(x), \quad (16)$$

где $\varphi_{1,2}(x)$, $A(x)$ – скалярные поля; величина e связана с константой связи соотношением $e = \sqrt{4\pi\lambda}$. Выражение для упругого формфактора $F_{(j)}(\chi_q)$ в этом случае имеет вид [4]

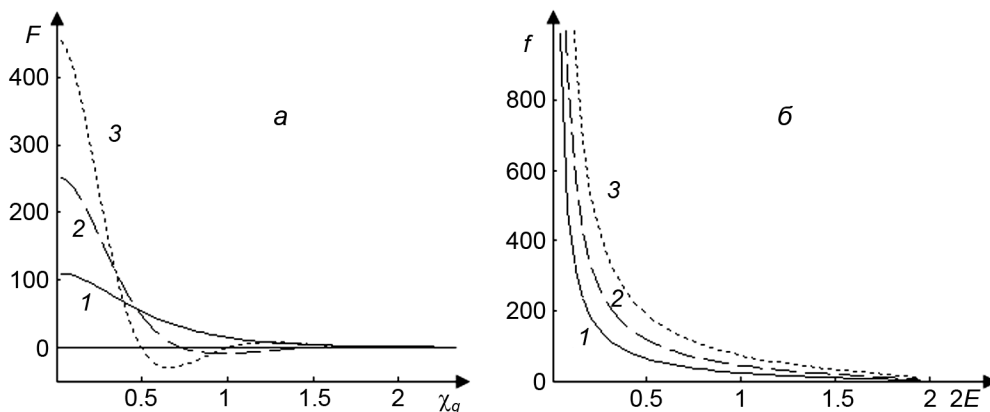
$$F_{(j)}(\chi_q) = 8\pi e / \left(m \operatorname{sh} \chi_q \right) \int_0^\infty dr \sin(\chi_q mr) / r \left| \psi_{(j)}(w, r) \right|^2, \quad (17)$$

где χ_q – быстрота, связанная с 4-импульсами двухчастичной системы до и после рассеяния $p = (p_0, \mathbf{p})$ и $p' = (p'_0, \mathbf{p}')$ соотношением $(p - p')^2 = (p_0 - p'_0)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = 2p^2 (\operatorname{ch} \chi_q - 1)$.

Выражение для константы распада системы двух скалярных частиц на два фотона было получено в работе [5] исходя из амплитуды процесса этого распада, и оно имеет следующий вид:

$$f_{(j)}(2E) = 2\sqrt{2\pi\lambda} / (2E) \int_0^\infty d\chi \chi \psi_{(j)}(w, \chi) = 2\sqrt{2\pi\lambda} / (2Em) \left. \frac{\partial}{\partial r} \psi_{(j)}(w, r) \right|_{r=0}. \quad (18)$$

Результаты численных расчетов (для $m = 1$, $\mu = 0,5$) зависимости формфакторов (17) от быстроты при $2E = 1,95$ и зависимости констант распада (18) от энергии системы приведены на рис. 3.

Рис. 3. Формфакторы упругого рассеяния для $j = 1$ (а); константы распада для $j = 2$ (б)

На рис. 3, а видно, что формфакторы для основного состояния нулей не имеют, для второго состояния имеют один ноль и для третьего состояния – два нуля. Дальнейшие вычисления показы-

вают, что для следующих состояний это соотношение справедливо: число нулей упругих форм-факторов равно номеру состояния минус один, т.е. они обладают тем же свойством, что и ВФ.

Рассмотрим распад связанной системы скалярной частицы и её античастицы с нулевым полным моментом на два фотона. Такая система может рассматриваться как аналог парапозитрония, состоящий из скалярных частиц. Вероятность распада (ширина распада) двухчастичной системы пропорциональна квадрату модуля константы распада этого процесса. В работе [7] было получено выражение для ширины распада такой системы на два фотона, имеющее следующий вид:

$$\Gamma_{(j)} = \frac{4\pi\lambda^2}{m^2} \left| \frac{\partial}{\partial r} \Psi_{(j)}(w, r) \right|^2 \bigg|_{r=0}. \quad (19)$$

Подстановка в (19) точной нерелятивистской ВФ основного состояния для потенциала Кулона [16] при $\lambda = 7,2973525698 \cdot 10^{-3}$ даёт значение ширины распада $\Gamma = 8,0325 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. Подстановка точной ВФ, полученной при решении модифицированного уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалом (14) [8], в формулу (19) даёт $\Gamma = 7,99518 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. В табл. 3 даны значения ширины распада для основного состояния, найденные на основании численных решений двухчастичных релятивистских уравнений (1) в случае потенциалов (13), (14) и потенциала Кулона.

Таблица 3

Ширина распада парапозитрония

j	N	$r^{-1} \text{th}(\pi mr/2) \cdot 10^9, \text{ с}^{-1}$	$r^{-1} \text{cth}(\pi mr) \cdot 10^9, \text{ с}^{-1}$	$r^{-1} \cdot 10^9, \text{ с}^{-1}$
1	800	7,93839	7,96634	7,95608
	1600	7,93847	7,96668	7,95645
2	800	7,91882	7,94244	7,93391
	1600	7,91891	7,94271	7,93423
3	800	7,99524	8,05911	8,03152
	1600	7,99503	8,06068	8,03298
4	800	7,96667	8,01248	7,99361
	1600	7,96660	8,01342	7,99452

Экспериментальное значение ширины распада для парапозитрония равно $7,9909(17) \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ [19]. Сравнивая его с вычисленными значениями, нетрудно увидеть, что наилучшее совпадение с экспериментально измеренным результатом даёт решение модифицированного уравнения Кадышевского с потенциалом Кулона, а также решение модифицированного уравнения Логунова – Тавхелидзе с суперпозицией потенциалов однобозонного обмена (14).

Заключение

В работе найдены численные решения уравнений квантовой теории поля в случае связанных s -состояний двух скалярных частиц. Решения получены для потенциала однобозонного обмена, суперпозиции таких потенциалов и для потенциала Кулона. На основании найденных решений рассчитаны формфакторы упругого рассеяния и константы распада двухчастичных систем. Анализ полученных результатов показал, что число нулей упругих формфакторов совпадает с числом нулей волновых функций и равно «номеру состояния системы минус один». Проведено сравнение полученных спектров энергии и констант распада в таком приближении с результатами экспериментальных измерений для позитрония.

Авторы выражают искреннюю благодарность Е.А. Дею за полезные обсуждения результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Logunov A. A. and Tavkhelidze A. N. // Nuovo Cimento. – 1963. – V. 29. – No. 2. – P. 380–399.
2. Kadyshvsky V. G. // Nucl. Phys. – 1968. – V. B6. – No. 1. – P. 125–148.
3. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2. – № 3. – С. 635–690.

4. Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. // ТМФ. – 1980. – Т. 43. – № 3. – С. 330–342.
5. Savrin V.I. and Skachkov N.B. // CERN Preprint. – 1980. – ТН. 2913. – 11 p.
6. Саврин В.И. Метод квазипотенциала в теории связанных состояний. – Самара: Изд-во «Самарский университет», 2006. – 134 с.
7. Козлов Г.А., Кулешов С.П., Саврин В.И. и др. // ТМФ. – 1984. – Т. 60. – № 1. – С. 24–36.
8. Капшай В.Н., Алфёрова Т.А. // Изв. вузов. Физика. – 1997. – Т. 40. – № 7. – С. 52–61.
9. Kapshai V.N. and Alferova T.A. // J. Phys. A: Math. Gen. – 1999. – V. 32. – P. 5329–5342.
10. Капшай В.Н., Гришечкин Ю.А. // Изв. вузов. Физика. – 2009. – Т. 52. – № 6. – С. 9–15.
11. Калиткин Н.Н. Численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
12. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.
13. Alferova, T.A. and Kapshai V.N. // Nonlinear phenomena in complex systems: Proc. of the Sixth Annual Seminar NPC'S'97 / Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys. – Minsk, 1998. – P. 78–85.
14. Дей Е.А., Капшай В.Н., Скачков Н.Б. // ТМФ. – 1990. – Т. 82. – № 2. – С. 188–198.
15. Solov'eva T.M. and Zhidkov E.P. // Comp. Phys. Comm. – 2000. – V. 126. – P. 168–177.
16. Мессиа А. Квантовая механика. Т. 1. – М.: Наука, 1978. – 480 с.
17. Mohr P.J., Taylor B.N., and Newell D.B. CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2010. – Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology, 2012. – 94 p.
18. Fee M.S. // Phys. Rev. Lett. – 1993. – V. 70. – No. 10. – P. 1397–1400.
19. Al-Ramadhan A.H. and Gidley D.W. // Phys. Rev. Lett. – 1994. – V. 72. – P. 1632–1635.

Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины,
г. Гомель, Республика Беларусь
E-mail: kapshai@rambler.ru

Поступила в редакцию 24.01.13.