

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

Ю. В. ЕГОРОВ, П. Р. ПОПИВАНОВ (БОЛГАРИЯ)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГЛАВНОГО ТИПА, НЕ ИМЕЮЩИХ РЕШЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 20 VI 1972)

1. В этой работе даются новые условия, необходимые для локальной разрешимости линейных дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами.

Мы рассматриваем уравнения вида $P(x, D)u = f(x)$, где $P(x, D)$ — псевдодифференциальный оператор (определение см. ^(1, 2)) с гладким символом $p(x, \xi)$, а функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема. Рассматриваются решения $u(x)$ из класса $D'(\Omega)$. Как и в работе [7], здесь предполагается, что P — оператор главного типа (г.т.),

$$p^0(x, \xi) = 0, \quad \xi \neq 0 \Rightarrow \text{grad } p^0(x, \xi) \neq 0,$$

где $p^0(x, \xi)$ — главная часть символа $p(x, \xi)$ оператора P , а $\text{grad} = \text{grad}_{x, \xi}$. Напомним следующее общеизвестное

О п р е д е л е н и е. Оператор $P(x, D)$ называется локально разрешимым в точке $x_0 \in \Omega$, если существует окрестность $\omega \subset \Omega$ точки x_0 , в которой для всякой функции $f \in C_0^\infty(\omega)$ существует распределение $u(x) \in E'(\Omega)$ такое, что $P(x, D)u = f(x)$ в ω .

Различные условия, необходимые для локальной разрешимости таких уравнений, были даны в работах ⁽³⁻⁹⁾ (см. работы ⁽¹⁰⁻¹²⁾, где дается обзор результатов). Условия в этой заметке являются наиболее общими и содержат в себе все ранее полученные.

2. Пусть $\text{Re } p^0(x, \xi) = a(x, \xi)$, $\text{Im } p^0(x, \xi) = b(x, \xi)$. Пусть (x^0, ξ^0) — характеристическая точка, т. е. $p^0(x^0, \xi^0) = 0$.

В силу (г.т.) имеем тогда, что $\text{grad } p^0(x^0, \xi^0) \neq 0$. Для определенности будем считать, что $\text{grad } a(x^0, \xi^0) \neq 0$. Тогда кусок поверхности $a(x, \xi) = 0$ (корамерности 1), содержащий точку (x^0, ξ^0) , расслаивается на бихарактеристики функций $a(x, \xi)$, т. е. кривые $x = x(t)$, $\xi = \xi(t)$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\dot{x}(t) = \text{grad}_\xi a(x(t), \xi(t)), \quad \dot{\xi}(t) = -\text{grad}_x a(x(t), \xi(t)).$$

Такие бихарактеристики называются нулевыми. Пусть L — отрезок нулевой бихарактеристики, для которой $(x(t_0), \xi(t_0)) = (x^0, \xi^0)$. Часть отрезка кривой L , соответствующую значениям $t > t_0$ ($t < t_0$), обозначим через L_+ (L_-).

Мы будем предполагать, что выполнено следующее

У с л о в и е (А):

$$b(x, \xi) \leq 0 \text{ на } L_-, \quad b(x, \xi) \geq 0 \text{ на } L_+.$$

Существуют такие последовательности точек $(x^n, \xi^n) \in L_-$, $(\tilde{x}^n, \tilde{\xi}^n) \in L_+$, сходящиеся к (x^0, ξ^0) , что

$$b(x^n, \xi^n) < 0, \quad b(\tilde{x}^n, \tilde{\xi}^n) > 0.$$

Таким образом, мы предполагаем, что функция $b(x, \xi)$ не обращается тождественно в нуль ни на каком отрезке кривой L , содержащем точку (x^0, ξ^0) . Это условие представляется довольно естественным и, как показывают простые примеры, не может быть отброшено.

3. Сформулируем теперь основной результат нашей работы.

Теорема 1. Пусть $P(x, D)$ — псевдодифференциальный оператор главного типа с гладкими коэффициентами. Пусть (x^0, ξ^0) — некоторая точка из $T^*(\Omega) \setminus 0$ такая, что $p^0(x^0, \xi^0) = 0$ и выполнено условие (A). Предположим, что либо $\partial_L b(x^0, \xi^0) \neq 0$, где ∂_L — оператор дифференцирования вдоль L , либо выполнено

$$\text{условие (B): } \lim_{\substack{(x, \xi) \rightarrow (x^0, \xi^0) \\ (x, \xi) \in L}} |(\alpha(x, \xi), \text{grad } b(x, \xi))| \cdot |b(x, \xi)|^{-1/2} < \infty,$$

если $(\alpha(x, \xi), \text{grad } a(x, \xi)) = 0, \alpha(x, \xi) \in C$.

Тогда оператор $P(x, D)$ не является локально разрешимым в точке x^0 .

В случае, когда $\partial_L b(x^0, \xi^0) \neq 0$, теорема была доказана Л. Хёрмандером в работе (5). Укажем некоторые простые условия, достаточные для справедливости условия (B).

Теорема 2. Пусть для оператора $P(x, D)$ главного типа выполнено условие (A) в характеристической точке (x^0, ξ^0) и $\partial_L b(x^0, \xi^0) = 0$.

Тогда каждое из следующих условий достаточно для справедливости условия (B):

(B₁) Функция $b(x, \xi)$ монотонна вдоль кривой L в некоторой окрестности точки (x^0, ξ^0) ;

(B₂) Функция $b(x, \xi)$ не равна 0 тождественно ни на каком отрезке нулевой бихарактеристики функции $a(x, \xi)$ в некоторой окрестности точки (x^0, ξ^0) ;

(B₃) Функция $b(x, \xi)$ имеет вдоль L нуль конечного порядка в точке (x^0, ξ^0) ;

(B₄) В некоторой окрестности точки (x^0, ξ^0) существует гладкое многообразие S , трансверсальное к L и обладающее следующим свойством: в каждой точке поверхности S , лежащей на поверхности $a(x, \xi) = 0$, функция $b(x, \xi)$ меняет знак с минуса на плюс при движении в положительном направлении по нулевой бихарактеристике функции $a(x, \xi)$, проходящей через эту точку.

Заметим, что, как легко видеть, условие (B₁) вытекает из условия (B₃). Достаточность условия (B₁) доказана в работе (6). Там же отмечено, что условие (B₁) можно заменить следующим, более слабым условием:

(B₁') Существует постоянная $C > 0$ такая, что $|b(x, \xi)| \leq C |b(y, \eta)|$, если $(x, \xi), (y, \eta) \in L$ и точка (x, ξ) лежит ближе к (x^0, ξ^0) , чем точка (y, η) .

Достаточность условия (B₂) для выполнения условия (B) доказана в работе (13).

4. Условие (B) не является необходимым для справедливости теоремы 1. Например, существует такая функция $f(x_1, x_2) \in C^\infty$, что для символа $p^0(x, \xi) = i\xi_1 + f(x_1, x_2)|\xi|$ оператора $P(x, D)$ не выполнено неравенство (B), но оператор $P(x, D)$ не является локально разрешимым.

Эта функция $f(x_1, x_2)$ имеет следующий вид. Пусть $\varphi(x_1) \in C^\infty$, $\varphi(x_1) \geq 0$ и $\varphi(-x_1) = \varphi(x_1)$. Пусть функция $\varphi(x_1)$ имеет нули бесконечного порядка в точках $x_1 = 0, x_1 = \pm 1/n$, где $n = 1, 2, \dots$, и положительна в остальных точках, а $\psi(x_1) = w(x_1)\varphi(x_1)$, где $w(x_1) = 2^{-n} \operatorname{sgn} x_1 \cdot \max_{|x_1| \leq 1/n} \varphi(x_1)$, если $1/n \leq |x_1| < 1/(n+1)$. Полагаем теперь $f(x_1, x_2) = \psi(x_1) + x_2\varphi(x_1)$.

Существует много примеров операторов, для которых условие (B) не выполнено в точке (x^0, ξ^0) , но выполняется в точках, сколь угодно близких к (x^0, ξ^0) . Например, в случае рассмотренного выше оператора $P(x, D)$ условие (B) не выполняется при $x_1 = x_2 = 0$, но существует последовательность точек $x^n = (x_1^n, x_2^n) \rightarrow 0$ такая, что в x^n выполнено условие (B₄).

Эта ситуация имеет место также, например, для следующего класса операторов.

Теорема 3. *Оператор $P(x, D)$ главного типа не является локально разрешимым, если выполнено следующее условие:*

(C) *Функция $b_0(t) = b(x(t), \xi(t))$, где $x = x(t)$, $\xi = \xi(t)$ — уравнения кривой L , меняет знак в точке $t = t_0$, не обращается в нуль тождественно ни на каком отрезке, имеет бесконечное множество нулей, сгущающееся в t_0 , и нули функции $b_0(t)$ чередуются с нулями функции $b_1(t) = (\alpha(t), \text{grad } b(x(t), \xi(t)))$, где $\alpha(t)$ — некоторый вектор, нигде не равный нулю и такой, что $(\alpha(t), \text{grad } a(x(t), \xi(t))) = 0$, $\alpha(t) \in C$.*

Можно было бы привести много примеров такого сорта, но мы не делаем этого из-за недостатка места. Укажем только, что таковыми являются операторы, для которых $b_1(t_0) \neq 0$, и операторы, у которых функция $b_1(t)$ имеет при $t = t_0$ нуль конечного порядка.

6. Доказательство теоремы 1 проводится по схеме, предложенной в работах ⁽⁵⁾ и ⁽⁷⁾, в связи с чем используется новый вариант теоремы о локализации. Мы используем также результаты работы ⁽¹⁴⁾ и лемму о неявной функции из работы ⁽¹⁵⁾. Наконец, строится приближенное решение задачи Коши для дифференциального оператора с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами аналогично тому, как это делается в работе ⁽⁶⁾.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. J. Kohn, L. Nirenberg, Comm. Pure and Appl. Math., 18, № 1/2, 269 (1965). ² L. Hörmander, ibid., 18, № 3, 501 (1965). ³ Л. Хёрмандер, Липейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. ⁴ L. Nirenberg, F. Trèves, Comm. Pure and Appl. Math., 16, № 3, 331 (1963). ⁵ L. Hörmander, Ann. Math., 83, № 1, 129 (1966). ⁶ L. Nirenberg, F. Trèves, Comm. Pure and Appl. Math., 23, № 1, 1 (1970). ⁷ Ю. В. Егоров, Тр. Московск. матем. общ., 24, 29 (1971). ⁸ В. В. Грушин, Матем. заметки, 10, № 2, 125 (1971). ⁹ Е. Г. Бам-Зеленкович, ДАН, 204, № 2, 267 (1972). ¹⁰ Ю. В. Егоров, УМН, 26, № 2, 183 (1971). ¹¹ F. Trèves, Proc. of Summer School on Berkley, 1971. ¹² L. Hörmander, Enseign. math., 17, № 2, 99 (1971). ¹³ F. Trèves, Comm. Pure and Appl. Math., 24, № 1, 71 (1971). ¹⁴ Ю. В. Егоров, Тр. Московск. матем. общ., 24, 3 (1971). ¹⁵ Г. И. Эскин, Матем. сборн., 82, № 4, 585 (1970).