

А. И. ПОНОМАРЕНКО

ОЦЕНИВАНИЕ СРЕДНЕГО ОДНОРОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ГРУППАХ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 26 VI 1972)

Пусть $\xi(g)$, $g \in G$, — левое однородное в широком смысле случайное поле на локально компактной группе G с операцией, записываемой как умножение, т. е. математическое ожидание $M\xi(g) = m$ есть постоянная, а корреляционная функция $B(s^{-1}g) = M[\xi(g) - m][\xi(s) - m]$ зависит только от произведения $s^{-1}g$ ⁽¹⁾. Обозначим через H линейное замыкание в среднем квадратичном множества всех случайных величин $\xi(g)$, $g \in G$, являющееся гильбертовым пространством со скалярным произведением $(\eta, \xi) = M\eta\xi$, $\eta, \xi \in H$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что поле $\xi(g)$, рассматриваемое как H -значная функция на G , сильно измеримо. Это требование выполняется, например, когда группа G удовлетворяет второй аксиоме счетности, а поле $\xi(g)$ непрерывно в среднем квадратическом.

Если группа G коммутативная, то тогда почти всюду по мере Хаара на G справедливы представления

$$\xi(g) = \int_{\hat{G}} \chi(g) Z(d\chi), \quad B(g) = \int_{\hat{G}} \chi(g) F(d\chi),$$

где $\hat{G}$ — группа характеров группы G , а F и Z — соответственно спектральная и случайная спектральная меры поля $\xi(g)$ ⁽¹⁾.

В H существует единственный элемент $\mathfrak{M}_g[\xi(g)]$, называемый средним значением поля $\xi(g)$ и определяемый следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой конечный набор элементов $g_1, \dots, g_n \in G$, что для всех $g \in G$

$$\left\| \mathfrak{M}_g[\xi(g)] - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi(gg_i) \right\| < \varepsilon$$

⁽²⁾. Пусть также $\mathfrak{M}_g[B(g)]$ — среднее значение положительно определенной функции $B(g)$, $g \in G$, в смысле Годмана ⁽³⁾. Из результатов ^(2, 4) следует, что для поля $\xi(g)$ на коммутативной группе G

$$\mathfrak{M}_g[\xi(g)] = Z(\{e\}), \quad \mathfrak{M}_g[B(g)] = F(\{e\}),$$

где e — единица группы $\hat{G}$.

Предположим, что поле $\xi(g)$ наблюдается на множестве Δ , $\Delta \subset G$, и по этим наблюдениям требуется оценить неизвестное среднее m поля $\xi(g)$.

Обозначим через K замыкание в H множества всех конечных линейных комбинаций $\sum_{i=1}^n c_i \xi(g_i)$, $g_i \in \Delta$, $\sum_{i=1}^n c_i = 1$. Элементы K можно использовать в качестве линейных несмещенных оценок m . В K существует элемент m^* с наименьшей нормой $\|m^*\| = \inf_{\eta \in K} \|\eta\|$, являющийся наилучшей несмещенной линейной оценкой m .

Так как для любого $\eta \in H$ множество $\{\xi - \eta: \xi \in K\}$ замкнуто и выпукло в H , то существует единственная случайная величина $\tilde{\eta} \in K$, называемая наилучшим несмещенным прогнозом η по известному K , такая, что $\|\eta - \tilde{\eta}\| = \inf_{\xi \in K} \|\eta - \xi\|$.

Следующие теоремы о представлениях m^* обобщают подобные результаты, полученные в ⁽⁵⁾ для стационарных случайных процессов.

Теорема 1. Пусть группа G обладает правозергодической сетью неотрицательных функций $\{\varphi_\lambda(g), \lambda \in \Lambda\}$, Λ — некоторое направление ⁽²⁾. Тогда

$$m^* = \text{l.i.m.}_{\lambda \in \Lambda} \int_G \varphi_\lambda(g) \tilde{\xi}(g) \nu(dg),$$

где ν — правая мера Хаара на G и интегралы понимаются как интегралы Бохнера.

Теорема 2. Пусть $H(\Delta)$ — минимальное подпространство пространства H , содержащее все случайные величины $\xi(s)$, $s \in \Delta$, и $\hat{\xi}(g)$ — ортогональная проекция $\xi(g)$ на $H(\Delta)$.

Тогда, если группа G обладает правозергодической сетью функций $\{\varphi_\lambda(g), \lambda \in \Lambda\}$ и $\|\mathfrak{M}[\xi(g)]\| > 0$, то

$$m^* = \text{l.i.m.}_{\lambda \in \Lambda} \int_G \varphi_\lambda(g) \hat{\xi}(g) \nu(dg).$$

Если же $\|\hat{\xi}(g)\| \in L_1(G, \nu)$ и существует интеграл

$$J = \int_G [B(g) + |m|^2] \mu(dg),$$

отличный от нуля, (μ — левая мера Хаара на G), то

$$m^* = J^{-1} \|m^*\|^2 \int_G \hat{\xi}(g) \mu(dg).$$

Теорема 3. Пусть группа G коммутативная, Δ — компактное подмножество G и ν' — сужение меры ν на Δ . Пусть также на Δ можно ввести закон композиции, относительно которого ν' инвариантна и Δ становится коммутативной компактной группой, изоморфной группе характеров Γ дискретной подгруппы $\hat{G}$ группы $\hat{G}$.

Тогда, если случайная спектральная мера Z поля $\xi(g)$, $g \in G$, сосредоточена на Γ , то

$$m^* = \frac{1}{\nu(\Delta)} \int_\Delta \xi(g) \nu(dg).$$

Теорема 4. Пусть группа G обладает правозергодической сетью функций $\{\varphi_\lambda(g), \lambda \in \Lambda\}$ и $\hat{m}_\lambda$ — оценка среднего m поля $\xi(g)$, $g \in G$, имеющие вид

$$\hat{m}_\lambda = \int_G \varphi_\lambda(g) \xi(g) \nu(dg).$$

Тогда сеть дисперсий $D\hat{m}_\lambda = \|\hat{m}_\lambda - m\|^2$ этих оценок удовлетворяет соотношению $\lim_{\lambda \in \Lambda} D\hat{m}_\lambda = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}[B(g)] = 0$.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
19 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. М. Яглом, Тр. IV Всесоюз. матем. съезда, 1, 1963, стр. 250. ² А. А. Темпельман, Литовск. матем. сборн., 2, 1, 195 (1962). ³ R. Godement, Trans. Am. Math. Soc., 63, 1, 1 (1948). ⁴ А. И. Пономаренко, Теория вероятн. и матем. стат., в. 1, 159 (1970). ⁵ U. Grenander, Arkiv Mat., 1, 6, 503 (1952).