Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 2

УДК 517.92 *МАТЕМАТИКА*

Б. В. АЛЕШИН

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 21 VII 1972)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = Y(t, x, y, \varepsilon), \quad \dot{x} = \varepsilon X(t, x, y, \varepsilon). \tag{1}$$

Пусть правые части системы (1) определены на множестве $\Sigma = I \times G \times \times \Lambda$, где $t \in I = [a, +\infty)$, $(x, y) \in G$ — некоторая область в пространстве переменных $(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m)$ и $\varepsilon \in \Lambda = [0, \varepsilon_1]$. Введем следующие обозначения: $Y_0(t, x, y) = Y(t, x, y, 0)$; $X_1(t, x, y) = X(t, x, y, 0)$. Обозначим через G_x проекцию области G на пространство переменных x. Решения системы (1) с начальными условиями (t_0, x_0, y_0) обозначим через $x = x(t, \varepsilon) = x(t, t_0, x_0, y_0, \varepsilon)$; $y = y(t, \varepsilon) = y(t, t_0, x_0, y_0, \varepsilon)$.

Если в системе (1) положить $\varepsilon = 0$, то получится система, которую в дальнейшем будем называть вырожденной:

$$\dot{y} = Y_0(t, x, y), \quad x = \text{const}. \tag{2}$$

Обозначим общее решение системы (2) через $y = \varphi(t, \tau, \xi, x)$ $(\varphi(\tau, \tau, \xi, x) = \xi)$.

Согласно методу усреднения, в системах, содержащих быстрые и медленные переменные (см. ([1-3])), если существует предел

$$\overline{X}_1(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} X_1(t, x, \varphi(t, \tau, \xi, x))\, dt, \tag{3}$$

то при определенных условиях решение системы (1) $x = x(t, \varepsilon)$ будет сколь угодно близко к решению $\bar{x} = \bar{x}(t, \varepsilon)$ так называемой усредненной системы

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon \overline{X}_1(\bar{x}), \quad \bar{x}(t_0, \varepsilon) = x_0 \tag{4}$$

на интервале времени $t \sim 1/\varepsilon$.

Вычисление предела (3), вообще говоря, затруднено из-за необходимости знать общее решение системы (2). В связи с этим интересно рассмотреть такие системы, для которых нахождение среднего $\overline{X}_1(x)$ и проверка связанных с ним условий была бы проще. Цель настоящей заметки заключается в рассмотрении некоторой такой системы и формулировке соответствующей теоремы. На этом пути нетрудно заметить также связь рассматриваемого метода усреднения с теоремой А. Н. Тихонова о дифференциальных уравнениях, содержащих малый параметр при производных (см. ([4, 5])).

Предположим, что у системы (2) для всякого $x \in D$, $D \subset G_x$ и $t \in I$ определено решение $y = \varphi_0(t, x)$, причем существует $\rho > 0$ такое, что множество $\Omega_\rho = \{(t, x, y): t \in I,\ x \in D,\ |y - \varphi_0(t, x)| < \rho\}$ лежит в $I \times G$.

Определение. Решение $y = \varphi_0(t, x)$ назовем *равномерно асимптотически устойчивым относительно множества* Ω_ρ, если для каждого $x \in D$ оно асимптотически устойчиво по Ляпунову и если для любого $\eta > 0$ и любых $(\tau, \xi, x) \in \Omega_\rho$ найдется такое $T(\eta)$, что для $t > \tau + T(\eta)$

$$|\varphi(t, \tau, \xi, x) - \varphi_0(t, x)| < \eta.$$

Сделаем следующие предположения о системе (2). Пусть $Y_0(t, x, y)$ непрерывна по совокупности всех своих аргументов и непрерывно дифференцируема по (x, y). Предположим, что существует решение системы (2) $y = \varphi_0(t, x)$, равномерно асимптотически устойчивое относительно некоторого Ω_ρ, где $\rho > 0$ и D компактно, имеющее непрерывные и равномерно ограниченные частные производные $\partial\varphi_0 / \partial x$ при $(t, x) \in I \times D$. Пусть $\partial Y_0 / \partial x$ и $\partial Y_0 / \partial y$ равномерно ограничены в Ω_ρ.

Если в (2) сделать замену $y = z + \varphi_0(t, x)$, то получится система

$$\dot{z} = Z(t, x, z), \quad x = \text{const}, \tag{2'}$$

где $Z(t, x, z) = Y_0(t, x, z + \varphi_0(t, x)) - Y_0(t, x, \varphi_0(t, x))$. Можно показать справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. *Существует такое $\rho_0 > 0$, что на множестве*

$$\Omega_{\rho_0} = \{(\tau, \xi, x)\colon \tau \in I,\ x \in D,\ |\xi - \varphi_0(t, x)| < \rho_0\}$$

существуют непрерывно дифференцируемая по всем аргументам функция $w = w(t, x, z)$ и положительно определенные функции $w_i(z)$, $i = 1, 2, 3$, такие, что а) $w_1(z) \leqslant w(t, x, z) \leqslant w_2(z)$, б) *производная, в силу системы* (2'),

$$\frac{d}{dt}[w(t, x, z)]_{(2')} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} Z,$$

удовлетворяют неравенству

$$\frac{d}{dt}[w(t, x, z)]_{(2')} \leqslant -w_3(z) \leqslant 0.$$

Лемма 2. *Пусть функция $X_1(t, x, y)$ непрерывна по (x, y) равномерно относительно t при $(t, x, y) \in \Omega_{\rho_0}$. Если при этом равномерно по $(\tau, x) \in I \times D$ существует предел*

$$\overline{X}_1(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{\tau}^{\tau+T} X_1(t, x, \varphi_0(t, x))\, dt,$$

то равномерно для любых $(\tau, \xi, x) \in \Omega_{\rho_0}$ существует предел

$$\overline{X}_1(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{\tau}^{\tau+T} X_1(t, x, \varphi(t, \tau, \xi, x))\, dt.$$

Лемма 1 позволяет сделать выводы о поведении «быстрых» переменных системы (1), а лемма 2 применить к этой системе теорему об усреднении и уточнить характер поведения «быстрых» движений. Чтобы сформулировать соответствующее утверждение, введем область Π влияния решения $y = \varphi_0(t, x)$, $\Pi = \{(t_0, x_0, y_0)\colon t_0 \in I,\ x_0 \in D,\ |\varphi(t, t_0, y_0, x_0) - \varphi_0(t, x)| \to 0$ при $t \to \infty\}$. При этом, естественно, предполагается, что если $(\tau, x, \xi) \in \Pi$, то решение $y = \varphi(t, \tau, \xi, x)$ определено для всех $t > \tau$. Будем считать, что $(t_0, x_0, y_0) \in \Pi$.

Теорема. 1) *Предположим, что правые части системы* (1) *непрерывны по совокупности аргументов при $(t, x, y, \varepsilon) \in \Sigma$ и при $\varepsilon = 0$ непрерывны по ε равномерно относительно остальных аргументов (t, x, y). Предположим, что решения $y = y(t, \varepsilon)$, $x = x(t, \varepsilon)$ определены для всех $\varepsilon \in \Lambda$ на интервале времени $t \in [t_0, t_0 + K / \varepsilon]$.*

2) *Пусть выполнены предположения относительно вырожденной системы решений $y = \varphi_0(t, x)$. Предположим, что $X_1(t, x, y)$ ограничена равномерно для всех $(t, x, y) \in \Omega_\rho$.*

3) *Пусть выполнены предположения леммы* 2. *Допустим, что* $\overline{X}_1(x)$ *непрерывна при* $x \in D$.

4) *Пусть решение системы* $\dot{\overline{x}} = \varepsilon \overline{X}_1(\overline{x})$, $\overline{x}(t_0, \varepsilon) = x_0$ *определено для всех* $t \in [t_0, t_0 + K/\varepsilon]$ *единственно и для указанных значений лежит строго внутри* D.

Тогда для любого $\eta > 0$ *найдется* ε_1 *такое, что при всех* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$

$$|x(t, \varepsilon) - \overline{x}(t, \varepsilon)| < \eta,$$

если $t \in [t_0, t_0 + K/\varepsilon]$, *и существует момент времени* $t_1(\eta) > t_0$ *такой, что*

$$|y(t, \varepsilon) - \varphi_0(t, \overline{x}(t, \varepsilon))| < \eta,$$

если $t \in [t_1(\eta), t_0 + K/\varepsilon]$.

Автор благодарит П. И. Кузнецова за внимание к работе.

Второй Московский государственный
медицинский институт им. Н. И. Пирогова

Поступило
20 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Изд. 3-е, М., 1963. [2] В. М. Волосов, УМН, 17, № 6, 3 (1962). [3] Б. В. Алешин, Вестн. Московск. унив., сер. матем., № 4, 35 (1969). [4] А. Н. Тихонов, Матем. сборн., **31** (73), 575 (1952). [5] А. Б. Васильева, УМН, 18, 3, 15 (1963).