Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 6

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

А. А. БАБАЕВ, В. В. САЛАЕВ

ОДНОМЕРНЫЙ СИНГУЛЯРНЫЙ ОПЕРАТОР С НЕПРЕРЫВНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ПО ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 19 VI 1972)

Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая; $t=t(s)$ — уравнение кривой γ в дуговых координатах; $s(t, \tau)$ — не бо́льшая из длин дуг, стягивающих точки $t, \tau\in\gamma$;

$$d_0=\sup_{t,\tau\in\gamma} s(t,\tau),\quad d_1=\sup_{t,\tau\in\gamma}|t-\tau|;$$

$s(t, \tau)$ — внутренняя метрика кривой γ. Она, вообще говоря, метрически не эквивалентна метрике $|t-\tau|$ *.

Через $\Phi_{(0,a]}$ обозначим множество неубывающих функций $\varphi(\delta)$, определенных на $(0, a]$ таких, что $\varphi(\delta)/\delta$ невозрастающая и $\varphi(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$.

Пусть f принадлежит C_γ — пространству непрерывных на γ функций. Определим

$$\omega_f^0(\delta)=\sup_{s(t,\tau)\leqslant\delta}|f(t)-f(\tau)|,\quad 0<\delta\leqslant d_0;$$

$$\omega_f(\delta)=\delta\sup_{\xi\geqslant\delta}\frac{1}{\xi}\sup_{|t-\tau|\leqslant\xi}|f(t)-f(\tau)|=$$

$$=\sup_{0<\xi\leqslant\delta}\xi\sup_{|t-\tau|\geqslant\xi}\left|\frac{f(t)-f(\tau)}{t-\tau}\right|,\quad 0<\delta\leqslant d_1.$$

Очевидно, $\omega_f(\delta)\in\Phi_{(0,d_1]}$.

$K_{(0,a]}$ — множество положительных, неубывающих функций с условием $\varphi(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$.

S_γ — множество элементов $(\mu,\nu)\in K_{(0,d_1]}\times K_{(0,d_0]}$, удовлетворяющих неравенствам $s(t,\tau)\leqslant\mu(|t-\tau|)$, $|t-\tau|\geqslant\nu(s(t,\tau))$.

Введем функции $\beta(\delta)=\sup_{|t-\tau|\leqslant\delta}s(t,\tau)$, $\delta\in(0,d_1]$; $\alpha(\delta)=\inf_{s(t,\tau)\geqslant\delta}|t-\tau|$, $\delta\in(0,d_0]$.

Справедливы утверждения:

$$(\beta,\alpha)\in S_\gamma;\ (\mu,\nu)\in S_\gamma\Rightarrow\beta(\delta)\leqslant\mu(\delta),\quad\alpha(\delta)\geqslant\nu(\delta);$$

$$(\mu,\nu)\in K_{(0,d_1]}\times K_{(0,d_1]},\ \mu(\delta)\geqslant\beta(\delta),\ \nu(\delta)\leqslant\alpha(\delta)\Rightarrow(\mu,\nu)\in S_\gamma.$$

$\beta(\delta)$ непрерывная справа, $\alpha(\delta)$ непрерывна; $\alpha(\delta)=O(\delta)$, $\delta=O(\beta(\delta))$; $\beta(\delta)$ строго возрастающая на $(0,\alpha(d_0)]$, равна d_0 на $[\alpha(d_0), d_1]$; $\beta(\delta)=$ $=\sup_{|t-\tau|=\delta}s(t,\tau)$, $\delta\in(0,\alpha(d_0)]$.

Приведем связь между функциями β и α. Пусть $f, g\in K_{(0,a]}$, $f(x)\underset{\text{сущ}}{\leqslant}g(x)$, если $f(x)\leqslant g(x)$ на некотором всюду плотном на $(0, a]$ множестве, содержащем a; $f\underset{\text{сущ}}{=}g\Leftrightarrow f\underset{\text{сущ}}{\leqslant}g$, $g\leqslant f$ (см. ([5]), стр. 317).

* Т. е., вообще говоря, не выполняется неравенство

$$s(t,\tau)\leqslant\mathrm{const}|t-\tau|.$$

Пусть $f \in K_{(0,a]}$. Произвольную функцию $\check{f}$, принадлежащую $K_{(0,f(a)]}$, назовем обобщенной обратной функции f, если $\check{f}(x) \overset{\text{сущ}}{=} \{y \mid f(y) \leqslant x\}$. (Близкие конструкции см. ([8]), стр. 47; ([9]), стр. 240—241; ([10]), стр. 22.)

Понятие обобщенной обратной взаимное.

Пусть $f \in K_{(0,a]}$ $g \in K_{(0,b]}$ и f: $(0, a] \to (0, b]$, g: $(0, b] \to (0, a]$. Для того чтобы f, g были обобщенными обратными, необходимо и достаточно, чтобы $f_* g^*(x) \leqslant x \leqslant f^* g_*(x)$, $x \in (0, b]$; $g_* f^*(x) \leqslant x \leqslant g^* f_*(x)$, $x \in (0, a]$; здесь приняты обозначения: если $\varphi \in K_{(0,c]}$, то $\varphi_*(x) = \varphi(x-0)$, $\varphi^*(x) = \varphi(x+0)$ при $x \in (0, c)$, $\varphi^*(c) = \varphi(c)$.

Функции $\beta|_{(0,\alpha(d_0)]}$, α обобщенные обратные.

Для любой непрерывной справа функции $\varphi \in K_{(0,a]}$ при условии $\delta = O(\varphi(\delta))$ существует замкнутая жорданова спрямляемая кривая, имеющая в каждой точке касательную, для которой $\beta(\delta) \sim \varphi(\delta)$ ($\beta \sim \varphi \equiv \beta = O(\varphi)$, $\varphi = O(\beta)$).

Рассмотрим особый (сингулярный) интеграл

$$\bar{f}(t) = \int_\gamma \frac{f(\xi) - f(t)}{\xi - t} d\xi + \pi i f(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma \setminus \gamma_\varepsilon(t)} \frac{f(\xi) - f(t)}{\xi - t} d\xi + \pi i f(t),$$

где $\gamma_\varepsilon(t) = \{z \in \gamma \mid s(t, z) \leqslant \varepsilon\}$, $0 < \varepsilon \leqslant d_0$.

Теорема 1. *Если* $\int_0^{d_0} (\omega_f(\alpha(\xi))/\alpha(\xi))\, d\xi < \infty$, *то* $\forall \delta \in (0, d_1]$

$$\omega_{\bar{f}}(\delta) \leqslant C \left(\int_0^{\beta(\delta)} \frac{\omega_f(\alpha(\xi))}{\alpha(\xi)} d\xi + \delta \int_{\beta(\delta)}^{d_0} \frac{\omega_f(\alpha(\xi))}{\alpha^2(\xi)} d\xi \right),$$

где постоянная C зависит лишь от γ, а правая часть, как функция аргумента δ, принадлежит $\Phi_{(0,d_1]}$.

Введем оператор

$$Z_b^a(\delta, \mu, \nu, \varphi) = \int_0^{\mu(\delta)} \frac{\varphi(\nu(\xi))}{\nu(\xi)} d\xi + \delta \int_{\mu(\delta)}^{b} \frac{\varphi(\nu(\xi))}{\nu^2(\xi)} d\xi,$$

где $\delta \in (0, a]$; $\quad \mu \in K_{(0,a]}$, $\mu(a) \leqslant b$; $\quad \nu \in K_{(0,b]}$, $\nu(b) \leqslant a$; $\quad \varphi \in \Phi_{(0,a]}$; $\int_0^b (\varphi(\nu(\xi))/\nu(\xi))\, d\xi < +\infty$.

Теорему 1 нетрудно записать в терминах оператора Z:

Если $(\delta, \mu, \nu, \varphi)$ *принадлежит области определения оператора* Z_b^a *и* μ, ν *обобщенные обратные, то* $Z(\delta) = Z_b^a(\delta, \mu, \nu, \varphi) \in \Phi_{(0,a]}$.

Пусть μ, ν обобщенные обратные и $\mu \overset{\text{сущ}}{\leqslant} \mu_1$, $\nu_1 \overset{\text{сущ}}{\leqslant} \nu$; тогда, если для некоторого $\delta \in (0, a]$ верно $\nu_{1*}\mu_1^*(\delta) \leqslant \delta$ или $\nu_1^*\mu_{1*}(\delta) \geqslant \delta$, то $Z_b^a(\delta, \mu, \nu, \varphi) \leqslant Z_b^a(\delta, \mu_1, \nu_1, \varphi)$.

Отсюда, в частности, следует, что значение оператора $Z_b^a(\delta, \mu, \check{\mu}, \varphi)$, $Z_b^a(\delta, \check{\nu}, \nu, \varphi)$ не зависит от выбора обобщенной обратной функции μ и ν.

Для $f \in K_{(0,a]}$, $\lambda > 0$ через $f_\lambda(x)$ обозначим произвольную функцию из $K_{(0,a]}$, равную $f(\lambda x)$ при $x \in (0, \min\{a, a/\lambda\}]$.

По определению $f \overset{\text{сл}}{=} O(g)$ (f слабо $O(g)$), если существует $\lambda > 0$, что, по крайней мере, для одной из функций f_λ выполнено $f_\lambda = O(g)$; $f \overset{\text{сл}}{\sim} g$, если $f \overset{\text{сл}}{=} O(g)$, $g \overset{\text{сл}}{=} O(f)$.

Отношение $\overset{\text{сл}}{\sim}$ рефлексивно, симметрично, транзитивно; $f \sim g \Rightarrow \Rightarrow f \overset{\text{сл}}{\sim} g$. Если $f \overset{\text{сл}}{\sim} g$ и одна из функций f или g принадлежит $\Phi_{(0,\, a]}$, то $f \sim g$. $f \overset{\text{сл}}{\sim} g \Rightarrow \check{f} \overset{\text{сл}}{\sim} \check{g}$, где $\check{f}$, $\check{g}$ — произвольные обобщенные обратные соответственно f и g. Существуют f, $g \in K_{(0,\, a]}$, что $f \overset{\text{сл}}{\sim} g$ и f не эквивалентна g.

Для любой функции $f \in K_{(0,\, a]}$ существует непрерывная функция $g \in K_{(0,\, a]}$ с непрерывной обобщенной обратной $\check{g}$ (в этом случае необходимо, чтобы g была строго возрастающая и, следовательно $\check{g} = g^{-1}$), что $f \overset{\text{сл}}{\sim} g$, $\check{f} \overset{\text{сл}}{\sim} \check{g}$.

Оператор Z_b^a слабо эквивалентные функции переводит в эквивалентные: пусть $(\delta,\ \mu,\ \check{\mu},\ \varphi)$, $(\delta,\ \mu,\ \check{\mu},\ \varphi)$ принадлежат области определения оператора Z_b^a, тогда $\mu = O(\mu_1) \Rightarrow Z_b^a(\delta,\ \mu,\ \check{\mu},\ \varphi) = O(Z_b^a(\delta,\ \mu_1,\ \check{\mu}_1,\ \varphi))$ с постоянной в «O» отношении, не зависящей от φ и выбора обобщенных обратных $\check{\mu}$, $\check{\mu}_1$.

Функцию $\mu \in K_{(0,\, a]}$ назовем допустимой сверху функцией кривой γ, если $a \leqslant d_1$, $\mu(a) \leqslant d_0$ и существуют постоянные $c > 0$, $\lambda > 0$, что по крайней мере для одной функции μ_λ выполняется неравенство $s(t,\ \tau) \leqslant C(\mu_\lambda)^*(|t-\tau|)$ при $|t-\tau| \leqslant a$. Двойственно определяется допустимая снизу функция кривой γ.

Если μ — допустимая сверху функция кривой γ, то $\check{\mu}$ — допустимая снизу функция кривой γ. Верно и обратное.

Пусть φ, $\psi \in K_{(0,\, a]}$; $\varphi \overset{\text{сл. сущ}}{=} O(\psi)$ по определению, если существует $\lambda > 0$, что, по крайней мере, для одной функции φ_λ найдется постоянная $C > 0$, что $\varphi_\lambda(x) \overset{\text{сущ}}{\leqslant} C\psi(x)$.

$\mu \in K_{(0,\, a]}$, $a \leqslant d_1$, является допустимой сверху функцией кривой γ тогда и только тогда, когда $\beta|_{(0,\, a]} \overset{\text{сл. сущ}}{=} O(\mu)$.

Теорема 2. *Пусть* $\mu \in K_{(0,\, a]}$ — *допустимая сверху функция кривой* γ *и сходится интеграл* $\int\limits_0^{\mu(a)} (\omega_f(\check{\mu}(\xi))/\check{\mu}(\xi))\, d\xi$; *тогда*

$$\omega_{\overline{f}}(\delta) \leqslant C Z^a_{\mu(a)}(\delta, \mu, \check{\mu}, \omega_{f|_{(0,a]}}),$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* f *и выбора* $\check{\mu}$.

Двойственным образом формулируется теорема 2′ в терминах допустимой снизу функции кривой γ.

Теоремы 2 и 2′ равносильны и содержат в себе теорему 1.

Если $s(t,\ \tau) \leqslant \mathrm{const}\ |t-\tau|$, то $\omega_f^0(\delta) \sim \omega_f^1(\delta) \sim \omega_f(\delta)$ при $0 < \delta \leqslant d_1$, с постоянными эквивалентности, не зависящими от f, где $\omega_f^1(\delta) = \sup\limits_{|t-\tau| \leqslant \delta} |f(t) - f(\tau)|$.

Следствие из теорем 2, 2′ ([14], [11], [2]). *Пусть* γ *такова, что* $s(t,\ \tau) \leqslant \mathrm{const}\ |t-\tau|$; *если сходится интеграл* $\int\limits_0^{d_0} \frac{\omega_f^0(\xi)}{\xi}\, d\xi$, *то*

$$\omega^0_{\overline{f}}(\delta) \leqslant C\left(\int\limits_0^{\delta} \frac{\omega_f^0(\xi)}{\xi}\, d\xi + \delta \int\limits_{\delta}^{d_0} \frac{\omega_f^0(\xi)}{\xi^2}\, d\xi\right),$$

при $\delta \in (0,\ d_0]$ *и*

$$\|\overline{f}\|_{C_\gamma} \leqslant C\left(\int\limits_0^{d_0} \frac{\omega_f^0(\xi)}{\xi}\, d\xi + \|f\|_{C_\gamma}\right),$$

где постоянная C *не зависит от* f.

При сравнении теорем 1, 2 удобно утверждение: если $\mu_1(\delta) = o(\mu_2(\delta)$
$\delta \to 0$, то $Z_b^a(\delta, \mu_1, \check{\mu}_1, \varphi) = O(Z_b^a(\delta, \mu_2, \check{\mu}_2, \varphi))$, $\delta \to 0$. Здесь же отметим
что если $\varphi_1(\delta) = O(\varphi_2(\delta))$, $\delta \to 0$, то $Z_b^a(\delta, \mu, \check{\mu}, \varphi_1) = O(Z_b^a(\delta, \mu, \check{\mu}, \varphi_2)$
$\delta \to 0$.

Наряду с множеством S_γ рассмотрим множество $T_\gamma = \{(\mu, \nu)$
$\in S_\gamma | \mu(\delta) / \delta, \delta / \nu(\delta)$ не возрастает$\}$.

Введем функции

$$p(\delta) = \sup_{\xi \leqslant \delta} \xi \sup_{|t-\tau| \geqslant \xi} \frac{s(t, \tau)}{|t-\tau|}, \quad 0 < \delta \leqslant d_1;$$

$$q(\delta) = \delta \inf_{s(t,\tau) \geqslant \delta} \frac{|t-\tau|}{s(t, \tau)}, \quad 0 < \delta \leqslant d_0.$$

Справедливы следующие

Утверждения:

$$(p, q) \in T_\gamma; \quad (\mu, \nu) \in T_\gamma \Rightarrow p(\delta) \leqslant \mu(\delta), \quad \nu(\delta) \leqslant q(\delta);$$

$$(\mu, \nu) \in S_\gamma \Rightarrow (\delta \sup_{\xi \geqslant \delta} (\mu(\xi)/\xi), \quad \delta \inf_{\xi \geqslant \delta} (\nu(\xi)/\xi)) \in T_\gamma;$$

$$p(\delta) = \delta \sup_{\xi \geqslant \delta} (\beta(\xi)/\xi); \quad q(\delta) = \delta \inf_{\xi \geqslant \delta} (\alpha(\xi)/\xi).$$

$p(\delta) \in C_{(0, d_1]}$, $q(\delta) \in C_{(0, d_0]}$; $p(\delta) = d_0$ *при* $\delta \in [\alpha(d_0), d_1]$;
$p|_{(0, \alpha(d_0)]}$, q *взаимообратимы.*

Пусть $0 < \mu(\delta) \in \Phi_{(0, a]}$, обозначим

$$\Phi H(\mu) = \left\{\varphi \in \Phi_{(0,a]} \,|\, Z^a_{\mu(a)}(\delta, \mu, \check{\mu}, \varphi) = O\left(\varphi(\delta) \frac{\mu(\delta)}{\delta}\right)\right\}.$$

По схеме работ ([3], [4]) можно дать ряд эквивалентных определений множе
ства $\Phi H(\mu)$, из которых, в частности, следует, что $\forall \lambda \in (0,$
$\delta / (\mu(\delta))^\lambda \in \Phi H(\mu)$.

Для $\varphi \in \Phi_{(0, a]}$, $a \leqslant d_1$, через H_φ обозначим множество тех $f \in C_\gamma$, для к
торых существует постоянная $C > 0$, что $\omega_f(\delta) \leqslant C\varphi(\delta)$ при $0 < \delta \leqslant$
Если в H_φ ввести норму

$$\|f\|_{H_\varphi} = \|f\|_{C_\gamma} + \sup_{0 < \xi \leqslant a} (\omega_f(\xi)/\varphi(\xi)),$$

то H_φ превращается в банахово пространство.

Теорема 3. *Если μ — допустимая сверху функция кривой γ, $\mu(\delta)$ /
не возрастает и $\varphi \in \Phi H(\mu)$, то оператор $Sf = \bar{f}$ действует из H_φ в H
$\psi(\delta) = \varphi(\delta)(\mu(\delta)/\delta)$ и ограничен.*

Следствие ([13], [12], [7], [6], [4], [1]). *Пусть γ такова, что* $s(t, \tau) \leqslant \mathrm{const}|t - \tau$
φ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условиям

$$\int_0^\delta \frac{\varphi(\xi)}{\xi} d\xi = O(\varphi(\delta)), \quad \delta \int_\delta^{d_0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi^2} d\xi = O(\varphi(\delta)).$$

Тогда оператор $Sf = \bar{f}$ действует в $H_\varphi{}^0 = \{f \in C_\gamma | \omega_f{}^0(\delta) = O(\varphi(\delta))\}$
ограничен в норме $\|f\|_{H_\varphi} = \|f\|_{C_\gamma} + \sup_{0 < \xi \leqslant d_0} (\omega_f^0(\xi)/\varphi(\xi))$.

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступи
19 VI 19

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Бабаев, Уч. зап. Азерб. гос. унив., сер. физ.-матем. наук, 4, 3—10 (196
[2] А. А. Бабаев, Уч. зап. Азерб. гос. унив., сер. физ.-матем. наук, 5, 11 (196
[3] А. А. Бабаев, В. В. Салаев, ДАН, 161, № 2, 267 (1965). [4] Н. К. Бари, С.
Стечкин, Тр. Московск. матем. общ., 5, 483 (1956). [5] С. Б. Бохнер, Лекции
интегралах Фурье, М., 1962. [6] Т. Г. Гегелия. Сообщ. АН ГрузССР, 13, 10, 5
(1952). [7] Н. А. Давыдов, ДАН, 64, № 6, 759 (1949). [8] А. Зигмунд, Тригон
метрические ряды, 1, 1965. [9] Е. Камке, Интеграл Лебега — Стильтьеса, М., 19
[10] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и простра
ства Орлича, М., 1958. [11] Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН ГрузССР, 8, 8, 5
(1947). [12] И. И. Привалов, Граничные свойства однозначных аналитическ
функций, М., 1941. [13] J. Premeli, Monatsh. Math u. phys., 19, 205 (190
[14] A. Zygmund, Prace Math.-Fiz., 32, 125 (1924).