Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 6

УДК 517.54 *МАТЕМАТИКА*

И. А. ВОЛЫНЕЦ

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ В ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 28 VI 1972)

Хорошо известна полунепрерывность снизу функционала площади $F(f)=\iint\limits_{|z|<1}|f'(z)|^2\,d\sigma_z$, где $f(z)$ — конформное отображение единичного круга. В некоторых вопросах теории функций важно знать достаточные условия непрерывности $F(f)$. На международной конференции по теории аналитических функций и ее приложениям в Ереване в 1965 г. Л. Берс в устной беседе высказал гипотезу, что достаточным условием будет сходимость производных Шварца $\{f, z\}$ в метрике

$$\|\{f,z\}\|=\sup_{z,|z|<1}(1-|z|^2)^2|\{f,z\}|,\qquad \{f,z\}=\frac{f'''}{f'}-\frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

В заметке строится пример, показывающей, что эта гипотеза, вообще говоря, не выполняется, и доказывается теорема, утверждающая, что при дополнительных ограничениях гипотеза верна.

Пример. Пусть

$$h(z)=[1+\ln 2-\ln(z-i)]/\pi,\qquad g_\varepsilon(\zeta)=\exp\left\{\left[1-\frac{3}{4(\varepsilon\zeta+1)}\right]\ln\zeta\right\},$$
$$0<\varepsilon<1,\quad f_\varepsilon(z)=g_\varepsilon(h(z)).$$

Мы покажем, что $f_\varepsilon(z)$ — однолистные аналитические в круге $|z|<1$ функции,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}f_\varepsilon(z)=f_0(z)=(h(z))^{1/4},\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\|\{f_\varepsilon,z\}-\{f_0,z\}\|=0$$

и в то же время $F(f_\varepsilon)=\infty$, а $F(f_0)<\infty$.

Так как $h(z)$ однолистна и $h(|z|<1)\subset D=\{\zeta\colon\ \zeta=\xi+i\eta,\ \ \xi>1,\ 0<\eta<1\}$, то для однолистности $f_\varepsilon(z)$ достаточно показать, что однолистна в D функция

$$\psi_\varepsilon(\zeta)=\left[1-\frac{3}{4(\varepsilon\zeta+1)}\right]\ln\zeta\ \text{ и }\ 0<\operatorname{Im}\psi_\varepsilon(\zeta)<2\pi\ \text{ в }\ D.$$

Имеем

$$\psi_\varepsilon(\zeta_2)-\psi_\varepsilon(\zeta_1)=(\zeta_2-\zeta_1)\int\limits_0^1\frac{d\psi_\varepsilon}{d\zeta}(\zeta_1+t(\zeta_2-\zeta_1))\,dt. \tag{1}$$

Покажем, что $\operatorname{Re}(d\psi_\varepsilon/d\zeta)>0$ в D; отсюда, в силу (1), будет следовать однолистность $\psi_\varepsilon(\zeta)$ в D. Действительно,

$$\operatorname{Re}\frac{d\psi_\varepsilon}{d\zeta}=\frac{\xi}{|\zeta|^2}\left(1-\frac{3(\varepsilon\xi+1)}{4|\varepsilon\zeta+1|^2}\right)+\frac{\eta}{|\zeta|^2}\frac{3\varepsilon\eta}{4|\varepsilon\zeta+1|^2}+$$
$$+\frac{3\varepsilon[(\varepsilon\xi+1)^2-\varepsilon^2\eta^2]}{4|\varepsilon\zeta+1|^4}\ln|\zeta|+\frac{3}{4}\frac{2\varepsilon\eta(\varepsilon\xi+1)}{|\varepsilon\zeta+1|^4}\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}\geqslant\frac{A}{|\zeta|}>0.$$

Используя теперь неравенство

$$\varepsilon\ln|\zeta|/|\varepsilon\zeta+1|^2\leqslant\frac{\ln|\zeta|}{|\zeta||1+\zeta/|\zeta||^2},$$

которое получается нахождением максимума по ε левой части, получаем что $0 < \operatorname{Im}\psi_\varepsilon(\zeta) < 2\pi$ в D.

Если обозначить $1 - \frac{3}{4(\varepsilon\zeta+1)}$ через φ_ε, то

$$\{g_\varepsilon, \zeta\} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_\varepsilon}{\zeta} + \varphi_\varepsilon' \ln \zeta\right)^2 + \frac{2\varphi_\varepsilon/\zeta^3 - 3\varphi_\varepsilon'/\zeta^2 + 3\varphi_\varepsilon''/\zeta + \varphi_\varepsilon''' \ln \zeta}{\varphi_\varepsilon/\zeta + \varphi_\varepsilon' \ln \zeta} -$$

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{\varphi_\varepsilon/\zeta^2 + 2\varphi_\varepsilon'/\zeta + \varphi_\varepsilon'' \ln \zeta}{\varphi_\varepsilon/\zeta + \varphi_\varepsilon' \ln \zeta}\right)^2, \quad \varphi_\varepsilon^{(k)} = -\frac{3}{4}\frac{(-\varepsilon)^k k!}{(\varepsilon\zeta+1)^{k+1}}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Так как

$$\varepsilon^k |\varepsilon\zeta + 1|^{-k-1} \leqslant \varepsilon^k (\varepsilon\xi + 1)^{-k-1} \leqslant \max_\varepsilon \varepsilon^k (\varepsilon\xi + 1)^{-k-1} = k^k \xi^{-k} (k+1)^{k+1},$$

то мы имеем равномерные по ε оценки производных функции φ_ε: $|\varphi_\varepsilon^{(k)}(\zeta)| \leqslant A_1 |\zeta|^{-k}$. В силу (2) эти оценки, вместе с неравенствами $|\varphi_\varepsilon/\zeta + \varphi_\varepsilon' \ln \zeta| \geqslant \operatorname{Re} \psi_\varepsilon' \geqslant A|\zeta|^{-1}$, дают равномерное по ε стремление $\{g_\varepsilon, \zeta\}$ к нулю при $\zeta \to \infty$. В ограниченной области $\{g_\varepsilon, \zeta\}$ стремится к $15/(32\zeta^2)$ равномерно по ζ при $\varepsilon \to 0$. Имеем $g_0(\zeta) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} g_\varepsilon(\zeta) = \zeta^{1/4}$ и $\{g_0, \zeta\} = 15/(32\zeta^2)$,

$$\|\{f_\varepsilon, z\} - \{f_0, z\}\| = \|[\{g_\varepsilon, \zeta\} \circ h(z) - \{g_0, \zeta\} \circ h(z)]\, h'^2(z)\| =$$

$$= \sup_{z, |z|<1} \frac{(1-|z|^2)^2}{\pi^2 |z+i|^2} \left|\left(\frac{15}{32\zeta^2} - \{g_\varepsilon, \zeta\}\right) \circ h(z)\right| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \quad (3)$$

поскольку первая дробь в правой части (3) ограничена в круге $|z| < 1$, а второй множитель стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ равномерно в $|z| < 1$.

Нетрудно проверить, что $F(f_\varepsilon) = \infty$, $F(f_0) < \infty$, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} F(f_\varepsilon) > F(f_0)$. Это завершает обоснование примера.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема. *Пусть последовательность однолистных аналитических в круге $|z| < 1$ функций $f_n(z)$, $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$, сходится к ограниченной в $|z| < 1$ функции $f(z) \not\equiv 0$, отображающей $|z| < 1$ на область D с границей класса C_α^3, $0 < \alpha < 1$. Если при этом $\lim\limits_{n\to\infty} \|\{f, z\} - \{f_n, z\}\| = 0$, то:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} F(f_n) = F(f)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{z, |z|<1} |f_n(z) - f(z)| = 0$.

Теорему будем доказывать от противного. При этом нам несколько раз придется переходить к подпоследовательностям функций, областей и точек, и для простоты записи мы будем оставлять для них те же обозначения, что и для исходных последовательностей.

Пусть неверно а). Тогда существуют последовательность $\{f_n(z)\}$ и последовательность точек $\{z_n\}$, $|z_n| < 1$, таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 1$, $\rho(f_n(z_n), D) = \rho_0 > 0$. Следуя доказательству леммы 3 в ([1]), найдем последовательность линейных отображений $B_n(\zeta)$ таких, что функции $\varphi_n(z) = B_n((f_n(z) - f_n(z_n))^{-1})$ отображают единичный круг на области D_n, содержащие область $(|\zeta| < 1) \cup (|\zeta - 1| < 1)$ и имеющие граничные точки на всякой полуокружности круга $|\zeta| \leqslant 1$.

Пусть $\{D_n\}$ — подпоследовательность, сходящаяся к своему ядру $\tilde{D}$. Из леммы о максимальном элементе следует, что такая подпоследовательность существует. Пусть $\tilde{z}_n = \varphi_n^{-1}(0)$, $\alpha_n = -\arg \varphi_n'(\tilde{z}_n)$, $A_n(z) = (ze^{i\alpha_n} + \tilde{z}_n) / (1 + ze^{i\alpha_n}\overline{\tilde{z}_n})$. Тогда по теореме Каратеодори $\varphi_n(A_n(z))$ сходится к функции $\tilde{f}(z)$, $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}'(0) > 0$, отображающей круг

$|z| < 1$ на область $\bar{D}$. В то же время имеем

$$|\{\varphi_n \circ A_n, z\}| \leqslant |\{f_n \circ A_n, z\} - \{f \circ A_n, z\}| + |\{f \circ A_n, z\}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{[\varepsilon_n + g(A_n(z))]\,|A_n'(z)|^2}{(1 - |A_n(z)|^2)^2} = \frac{\varepsilon_n + g(A_n(z))}{(1 - |z|^2)^2};$$

здесь $g(z) = (1 - |z|^2)^2 |\{f, z\}|$, и в данном случае, в силу предположенной гладкости границы области D, $\lim\limits_{|z|\to 1} g(z) = 0$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} |A_n(z)| = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \{\varphi_n \circ A_n, z\} = 0$, что противоречит тому, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(A_n(z)) = \tilde{f}(z)$ и $\tilde{f}(z)$ не является дробно-линейным отображением (в силу свойств областей D_n). Тем самым утверждение а) доказано.

Пусть неверно б). Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, подпоследовательность $\{f_n(z)\}$ и последовательность точек $\{z_n\}$ таких, что $|f_n(z_n) - f(z_n)| > \varepsilon_0$. Выберем подпоследовательность $\{z_n\}$, сходящуюся к z_0, тогда $\{f(z_n)\}$ сходится к $f(z_0)$. Пусть Δ — область с границей класса C_α^3 такая, что $\{z_n, n \geqslant n_0\} \subset \Delta \subset [D \cap (|\zeta - f(z_0)| < \varepsilon_0 / 4)]$, и пусть $\varphi(z)$ — одно из конформных отображений круга $|z| < 1$ на область $f^{-1}(\Delta)$. Тогда для последовательности $\{f_n \circ \varphi\}$ выполнены условия теоремы и в то же время существуют точки $\tilde{z}_n$ в $\varphi^{-1}(f^{-1}(\Delta))$, образы которых при отображении $f_n \circ \varphi$ находятся, по меньшей мере, на расстоянии $\varepsilon_0 / 2$ от Δ. Этого не может быть по доказательству пункта а), и, таким образом, утверждение б) также доказано.

Замечание 1. Нормировка отображений в теореме введена для удобства и несущественна. В некотором смысле несущественно предположение о сходимости $f_n(z)$. Именно, если этого не предполагать, то можно найти дробно-линейные отображения $B_n(\zeta)$ такие, что последовательность $B_n(f_n(z))$ будет удовлетворять условиям теоремы.

Замечание 2. Если не требовать ограниченности $f(z)$, а условия гладкости на ∞ понимать как соответствующие условия гладкости в 0 при отображении $1/z$, то пункт а) становится очевидным, а пункт б) будет верен для последовательности $B(f_n(z))$ при некотором дробно-линейном $B(\zeta)$.

Замечание 3. Условие $f(z) \not\equiv 0$ существенно, как показывает пример функций $f_n(z) = (nz - n + 1) / (n - nz - z) + (n - 1) / n$, $f(z) \equiv 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

В заключение автор выражает благодарность П. П. Белинскому и С. Л. Крушкалю за советы и замечания.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
18 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Белинский, Сборн. Некоторые проблемы математики и механики, «Наука», 1970, стр. 88.