Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 4

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

Г. П. КАРЕВ

О СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛОВ МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 21 VI 1972)

Пусть N — множество неотрицательных целых чисел, $\{(E_t, \mathfrak{F}_t), t \in N\}$ — последовательность измеримых пространств. Для всех $t, k \in N$ пусть P_{t+k}^t — переходная вероятность для пространств $(E_t, \mathfrak{F}_t)$ и $(E_{t+k}, \mathfrak{F}_{t+k})$. Введем обозначения: $\prod\limits_{s\in N} E_s$, $\mathfrak{A}_\infty = \bigotimes\limits_{s\geqslant t} \mathfrak{F}_s$ — произведение σ-алгебр $\mathfrak{F}_s$ при $s \geqslant t$, X_t: $\Omega \to E_t$ — координатное отображение. Для любых t и $x_t \in E_t$ пусть P_{t,x_t} — вероятность на $(\Omega, \mathfrak{A}_\infty^t)$, определяемая на цилиндрических множествах $\prod\limits_s F_s$ $(F_s = E_s$ при $s < t)$ равенствами

$$P_{t,x_t}\left[\prod_s F_s\right] = 1_{F_t}(x_t) \int\limits_{F_{t+1}} P_{t+1}^t(x_t, dx_{t+1}) \ldots \int\limits_{F_T} P_T^{T-1}(x_{T-1}, dx_T),$$

где 1_{F_t} — характеристическая функция множества F_t, а T настолько велико, что $F_s = E_s$ при $s > T$.

Пусть μ_0 — вероятность на $(E_0, \mathfrak{F}_0)$, и $P \equiv \int \mu_0(dx_0) P_{0,x_0}$. Последовательность $\{X_t, t \in N\}$, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}_\infty^0, P)$, образует марковскую цепь (с дискретным временем). Обозначим

$$\mu_t = \int\limits_{E_0} \mu_0(dx_0) P_t^0(x_0, \cdot).$$

Если цепь $\{X_n\}$ является дискретным ветвящимся процессом с матрицей вероятностей перехода $\|p_{ij}\|$, то (см. [2], гл. 1, стр. 27) последовательность нормированных случайных величин $\{X_n / m^n\}$ сходится почти всюду к конечному пределу (m — математическое ожидание «числа потомков от одной частицы»). Это утверждение тесно связано с тем, что в случае ветвящегося процесса выполняются равенства

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik} k = mi.$$

В случае однородной дискретной марковской цепи со счетным числом состояний Дуб [4] показал, что для сходимости почти всюду последовательности $\{u(X_n)\}$ достаточно потребовать, чтобы числовая последовательность $\{u(i)\}$ была ограничена снизу и были выполнены соотношения

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik} u(k) \leqslant u(i).$$

Блекуэлл [3] доказал, что равенство $M(f | X_0 = i) = u(i)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между ограниченными инвариантными функциями f и ограниченными решениями системы

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{ik} u(k) = u(i),$$

причем $u(X_n) \to f$ почти всюду.

Аналогичное утверждение справедливо в случае общих марковских цепей с дискретным временем (см. ([1]), гл. 5, стр. 241).

Перечисленные утверждения содержатся в качестве частных случаев в следующих теоремах.

Теорема 1. *Пусть на пространствах* $(E_t, \mathfrak{F}_t)$ *заданы измеримые неотрицательные конечные п.в.* $\operatorname{mod} \mu_t$ *функции* g_t, *удовлетворяющие при всех* $t \in N$ *и почти всех* $\omega \in \Omega$ *равенствам*

$$\int_{E_{t+1}} P_{t+1}^{t}(X_t(\omega), dx_{t+1})\, g_{t+1}(x_{t+1}) = c_t(X_t)(\omega)\,(g_t(X_t)(\omega) + \varepsilon_t(X_t)(\omega)),$$

где измеримые функции c_t *и* ε_t, *заданные на* $(E_t, \mathfrak{F}_t)$, *таковы, что неравенства* $|\varepsilon_t(X_t)(\omega)| < \infty$, $0 < c_t(X_t)(\omega) < \infty$ *выполнены почти всюду* $\operatorname{mod} P$.

Положим

$$a_t(x_t) = \int_{\Omega} P_{t, x_t}(d\omega) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{t+k}^{+}(X_{t+k})(\omega)}{\prod_{s=0}^{k-1} c_{t+s}^{-}(X_{t+s})(\omega)},$$

где $\varepsilon^{+} = \max(0, \varepsilon)$.

Пусть $K_t = \{x_t \in E_t\colon a_t(x_t) < \infty\}$.

Если $\mu_0(K_0) = 1$, *то для всех* $t \in N$ *последовательность*

$$\left\{ \frac{g_{t+n}(X_{t+n})}{\sum_{s=0}^{n-1} c_{t+s}(X_{t+s})} \right\}$$

при $n \to \infty$ *и ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\varepsilon_{t+n}(X_{t+n})|}{\prod_{s=0}^{n-1} c_{t+s}(X_{t+s})}$$

сходятся почти всюду $\operatorname{mod} P$. *Кроме того, если*

$$\varphi_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{g_{t+n}(X_{t+n})(\omega)}{\prod_{s=0}^{n-1} c_{t+s}(X_{t+s})(\omega)},$$

то $\varphi_{t+1} = c_t \varphi_t$.

В следующей теореме, дополняющей теорему 1, приводится несколько иное условие, гарантирующее в ряде случаев сходимость соответствующей последовательности случайных величин.

Теорема 2. *Пусть на пространствах* $(E_t, \mathfrak{F}_t)$ *заданы измеримые неотрицательные конечные п.в.* $\operatorname{mod} \mu_t$ *функции* g_t, *удовлетворяющие при всех* $t \in N$ *и почти всех* ω *соотношениям*

$$\int_{E_{t+1}} P_{t+1}^{t}(X_t(\omega), dx_{t+1})\, g_{t+1}(x_{t+1}) = c_t(X_t)(\omega)\,(g_t(X_t)(\omega) + \varepsilon_t(X_t)(\omega)) =$$
$$= d_t(X_t)(\omega) \cdot g_t(X_t)(\omega),$$

где измеримые функции c_t, ε_t *и* d_t *таковы, что неравенства*

$$|\varepsilon_t(X_t)(\omega)| < \infty, \quad 0 < c_t(X_t)(\omega) < \infty, \quad 0 < d_t(X_t)(\omega) < \infty$$

выполнены п.в. $\operatorname{mod} P$.

Положим

$$A = \left\{\omega : \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_t^+(X_t)(\omega)}{g_t(X_t)(\omega) + \varepsilon_t^+(X_t)(\omega)} < \infty\right\},$$

$$B = \left\{\omega : \sum \frac{\varepsilon_t^-(X_t)(\omega)}{g_t(X_t)(\omega) - \varepsilon_t^-(X_t)(\omega)} < \infty\right\},$$

$$C = \left\{\omega : \lim_{t\to\infty} \frac{g_t(X_t)(\omega)}{\prod_{s=0}^{t-1} d_s(X_s)(\omega)} > 0\right\}.$$

Тогда последовательность $\dfrac{g_{t+n}(X_{t+n})}{\prod_{s=0}^{n-1} c_{t+s}(X_{t+s})}$ *при* $n \to \infty$ *сходится на множестве* A *почти всюду* $\operatorname{mod} P$. *Кроме того, на множестве* $A \cap B$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_{t+n}(X_{t+n})(\omega)}{\prod_{s=0}^{n-1} c_{t+s}(X_{t+s})(\omega)} > 0$$

тогда и только тогда, когда $\omega \in C$. *Если* $\omega \in B \cap C$, *то для сходимости последовательности*

$$\frac{g_{t+n}(X_{t+n})(\omega)}{\prod_{s=0}^{n-1} c_{t+s}(X_{t+s})(\omega)}$$

условие $\omega \in A$ *является необходимым.*

Следующую теорему можно рассматривать как обращение теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть на пространствах* $(\Omega, \mathfrak{A}_\infty^t)$ *заданы измеримые функции* $\psi_t(\omega)$, $\delta_t(\omega)$, $c_t(\omega) = c_t(X_t)(\omega)$, *причем почти всюду* $\operatorname{mod} P$ *и при всех* $t \in N$ *выполнены соотношения*

$$\psi_{t+1}(\omega) = c_t(\omega)(\psi_t(\omega) + \delta_t(\omega)).$$

Положим

$$g_t(x_t) = \int_\Omega P_{t,x_t}(d\omega)\,\psi_t(\omega), \quad \varepsilon_t(x_t) = \int_\Omega P_{t,x_t}(d\omega)\,\delta_t(\omega).$$

Будем предполагать, что $|g_t(X_t)(\omega)| < \infty$, $|\varepsilon_t(X_t)(\omega)| < \infty$, $0 < c_t(X_t)(\omega) < \infty$ *п.в.* $\operatorname{mod} P$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *При всех* $t \in N$ *почти всюду* $\operatorname{mod} P$ *выполняются равенства*

$$\int_{E_{t+1}} P_{t+1}^t(X_t(\omega), dx_{t+1})\, g_{t+1}(x_{t+1}) = c_t(X_t)(\omega)(g_t(X_t)(\omega) + \varepsilon_t(X_t)(\omega)).$$

2) *Если* $\delta_t(\omega) = \delta_t(X_t)(\omega)$ *при всех* t, *то последовательность*

$$\left\{ \frac{g_{t+n}(X_{t+n})}{\prod\limits_{s=0}^{n-1} c_{t+s}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_{t+k}(X_{t+k})}{\prod\limits_{s=0}^{k-1} c_{t+s}} \right\}$$

при $n \to \infty$ *сходится п.в. к функции* ψ_t *и равномерно интегрируема относительно* $P_{t,\, x_t(\omega)}$ *при почти всех* $\omega \bmod P$.

3) *Если, кроме того, п.в. сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{t+k}(X_{t+k})}{\prod\limits_{s=0}^{k-1} c_{t+s}},$$

то последовательность

$$\left\{ \frac{g_{t+n}(X_{t+n})}{\prod\limits_{=0}^{n-1} c_{t+s}} \right\}$$

при $n \to \infty$ *сходится п.в. к функции*

$$\varphi_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{\psi_{t+n}(\omega)}{\prod\limits_{s=0}^{n-1} c_{t+s}(\omega)},$$

причем выполнены соотношения $\varphi_{t+1}(\omega) = c_t(\omega) \cdot \varphi_t(\omega)$.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
9 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ж. Неве, Математические основы теории вероятностей, М., 1969. [2] Т. Харрис, Теория ветвящихся случайных процессов, М., 1966. [3] D. Blackwell, Ann. Math. Stat., 26, № 4, 654 (1955). [4] J. Doob, J. Math. and Mech., 8, № 3, 433 (1959).