

В. Н. ЗАМЯТИН

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЧЕБЫШЕВСКИЕ ЦЕНТРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 3 VII 1972)

Пусть V и L — подмножества нормированного пространства X . Чебышевским центром множества V относительно множества L назовем точку $y^* \in L$, удовлетворяющую соотношению

$$\sup_{x \in V} \|x - y^*\| = \inf_{y \in L} \sup_{x \in V} \|x - y\|. \quad (1)$$

В частности, если $L = X$, то получается обычное определение чебышевского центра ⁽¹⁾. В данной заметке рассматривается задача о существовании чебышевского центра для любого ограниченного множества V , принадлежащего пространству непрерывных функций $C(T)$, заданных на метрическом компакте T , относительно подпространств конечной коразмерности n , $n \geq 1$.

Пусть V — ограниченное множество в $C(T)$. Рассмотрим функции

$$M(t) = \sup_{x \in V} x(t), \quad m(t) = \inf_{x \in V} x(t), \quad t \in T, \quad (2)$$

$$N(t) = \inf_{U(t)} \sup_{\tau \in U(t)} M(\tau), \quad n(t) = \sup_{U(t)} \inf_{\tau \in U(t)} m(\tau), \quad t \in T,$$

где $U(t)$ пробегает все окрестности точки t . В ⁽²⁾ для случая $C[a, b]$, а в ⁽³⁾ для случая $C(T)$ (T — произвольный бикомпакт) было показано, что чебышевский центр существует для любого ограниченного множества V , а чебышевский радиус r множества V определяется формулой

$$r = \frac{1}{2} \max_t |N(t) - n(t)|. \quad (3)$$

Известно, что всякий линейный функционал, определенный на $C(T)$, имеет вид

$$f(x) = \int_T x(t) d\mu(t),$$

где μ — счетно-аддитивная регулярная мера, заданная на всех борелевских подмножествах из T , а интеграл понимается в смысле Радона — Стильтьеса ⁽⁴⁾. Поэтому всякое подпространство L^n дефекта n в пространстве $C(T)$ задается системой уравнений

$$\int_T x(t) d\mu_j(t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

где $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ — линейно независимые меры Радона, составляющие базис аннулятора R^n подпространства L^n в пространстве $C(T)^*$, сопряженном к $C(T)$.

В доказательствах применяется следующая характеристика подпространств конечного дефекта, обладающих свойством (E) *.

Теорема А ((⁵), стр. 644). Подпространство $L^n \subset C(T)$ обладает свойством (E) тогда и только тогда, когда:

а) для любой меры $\mu \in R^n$ существуют замкнутые множества T_μ^+ и T_μ^- , образующие разложение носителя T_μ меры μ в смысле Хана (см. (⁴), стр. 144);

б) для любых мер $\mu', \mu'' \in R^n$ множество $T_{\mu'} \setminus T_{\mu''}$ замкнуто;

в) мера μ'' абсолютно непрерывна относительно μ' на множестве $T_{\mu'}$.

Лемма. Пусть функция $u(t)$ полунепрерывна сверху, а $v(t)$ — снизу, причём $u(t) \leq v(t)$ при всех $t \in T$.

Тогда существует множество $V \subset C(T)$ такое, что

$$u(t) = \min_{x \in V} x(t), \quad v(t) = \max_{x \in V} x(t).$$

Доказательство непосредственно следует из теоремы Катетова ((⁶), теорема 1).

Теорема 1. Пусть гиперподпространство L^1 обладает свойством E, а носитель T_{μ_1} меры μ_1 бесконечен.

Тогда существует ограниченное множество $V \subset C(T)$, не имеющее чебышевского центра относительно L^1 .

Доказательство. Так как L^1 обладает свойством E, то, согласно теореме А, носитель T_{μ_1} можно разбить на два замкнутых непересекающихся множества $T_{\mu_1}^+$ и $T_{\mu_1}^-$ такие, что $\mu_1(e) \geq 0$, если $e \subset T_{\mu_1}^+$; $\mu_1(e) \leq 0$, если $e \subset T_{\mu_1}^-$. Допустим для определенности, что множество $T_{\mu_1}^+$ бесконечно. Отделим множества $T_{\mu_1}^+$ и $T_{\mu_1}^-$ непересекающимися окрестностями $U^+ \supset T_{\mu_1}^+$, $U^- \supset T_{\mu_1}^-$ и рассмотрим последовательность точек $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ из множества $T_{\mu_1}^+$, сходящуюся к некоторой точке t_0 . Построим семейство $\{G_k\}_{k=1}^\infty$ окрестностей точек t_k так, чтобы $\bar{G}_k \cap \bar{G}_j = \emptyset$ при $k \neq j$, $G_k \subset U^+$ при любом k , $d(G_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Очевидно, $\mu_1(G_k) > 0$ при всех k . Положим $G = \bigcup_{k=1}^\infty G_{2k}$, $\Gamma(G) = \bar{G} \setminus G$, $F = T \setminus \bar{G}$, $\Gamma(F) = \bar{F} \setminus F$. Тогда компакт T можно представить в виде суммы трех попарно непересекающихся множеств $T = G \cup F \cup \Gamma(G)$.

Рассмотрим функцию

$$P(t) = \begin{cases} 0, & t \in F \cup \Gamma(G), \\ -1, & t \in G, \end{cases}$$

и гиперплоскость

$$H^1 = \left\{ x(t) \in C(T) : \int_T x(t) d\mu_1(t) = \int_T P d\mu_1 = c \right\}.$$

Обозначим через $p(t)$ функцию-минимум для $P(t)$ ((⁷), стр. 136). Функции $P(t)$ и $p(t)$ непрерывны на множестве $F \cup G$ и разрывны в каждой точке множества $\Gamma(G)$. Рассмотрим множество $V = \{x(t) \in C(T) : -2 \leq x(t) \leq p(t) + 2\}$. Так как $P(t)$ есть функция-максимум для $p(t)$, то из (2) и леммы получается, что $M(t) = p(t) + 2$, $N(t) = P(t) + 2$, $m(t) = n(t) = -2$ при любом $t \in T$. Согласно (3), чебышевский радиус r множества V в пространстве $C(T)$ равен 2. Пусть R — чебышевский радиус множества V относительно H^1 . Ясно, что $R \geq 2$. Пользуясь теоремой П. С. Урысона ((⁴), стр. 25), по любому $\varepsilon > 0$ можно построить $y_\varepsilon(t) \in H^1$ удовлетворяющую неравенству $\|x - y_\varepsilon\| \leq 2 + \varepsilon$, $x \in V$. Следовательно, R равен 2.

* Говорят, что подпространство $L \subset X$ обладает свойством (E) если для любого элемента $x \in X$ найдется ближайший элемент $y^* \in L$, т. е. такой, что $\|x - y^*\| = \inf_{y \in L} \|x - y\|$.

Допустим теперь, что есть функция $y(t) \in H^1$, для которой

$$\sup_{x \in V} \|x - y\| = R = 2.$$

Из определения функций $p(t)$, $P(t)$, множества V , а также из леммы следует, что функция $y(t) \geq -1$ в любой точке компакта T и $y(t) = 0$ при $t \in F$. Отсюда по непрерывности получаем, что $y(t) = 0$ при $t \in \Gamma(F)$, в частности, $y(t_0) = 0$. Так как t_0 — предельная точка для последовательности $\{t_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, то $y(t) > -1$ для некоторого подмножества положительной меры из G . Поэтому $\int_T y(t) d\mu_1(t) > c$, и, следовательно, множество V не

имеет чебышевского центра относительно гиперплоскости H^1 . В таком случае множество $V - x_0$, $x_0 \in H^1$, не будет иметь чебышевского центра относительно гиперподпространства L^1 .

Теорема 2. Пусть подпространство L^n в пространстве $C(T)$ обладает свойством (E) и носитель хотя бы одной из мер, определяющих L^n , бесконечен.

Тогда существует ограниченное множество $V \subset C(T)$, не имеющее чебышевского центра относительно L^n .

Доказательство. Предположим, что мера μ_1 имеет бесконечный носитель. Построим так же, как и в предыдущей теореме, множество V , не имеющее чебышевского центра относительно гиперплоскости $H^1 = \{x \in C(T) : \int_T x d\mu_1 = \int_T P d\mu_1 = c_1\}$, и покажем, что V не имеет

центра относительно плоскости $H^n = \{x \in C(T) : \int_T x d\mu_j = \int_T P d\mu_j = c_j, j = 1, 2, \dots, n\}$.

Так как по доказанному $\int_T y d\mu_1 > c_1$, то остается показать, что чебышевский радиус множества V относительно H^n равен 2. Зафиксируем $\varepsilon_1 > 0$ и пусть $\varepsilon > 0$ — любое число, меньшее $\varepsilon_1/2$. Так же, как и в теореме 1, строим множество G и функцию $y_\varepsilon(t) \in H^1$, для которой $\|x - y_\varepsilon\| \leq 2 + \varepsilon$, $x \in V$, причем $y_\varepsilon(t)$ отлична от $P(t)$ лишь на подмножестве W из G как угодно малой меры. Положим

$$\int_T y_\varepsilon d\mu_j = c_j + \alpha_j(\varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Поскольку L^n обладает свойством E, то согласно характеристике такого подпространства, приведенной в теореме А, множество G можно выбрать так, что меры $\mu_2, \dots, \mu_n$ будут абсолютно непрерывны относительно μ_1 . Поэтому можно считать, что $\mu_j(W) < \delta$ при любом j ($\delta = \delta(\varepsilon)$, $\delta \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$). Отсюда при $\varepsilon \rightarrow 0$ $s = \max |\alpha_j(\varepsilon)| \rightarrow 0$. Согласно лемме Хелли ((4), стр. 101), существует функция $\psi_\varepsilon(t)$ такая, что

$$\int_T \psi_\varepsilon d\mu_j = -\alpha_j(\varepsilon), \quad \|\psi_\varepsilon\| \leq \delta(s),$$

где $\delta(s) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому можно выбрать такое ε , что функция $\bar{y}_\varepsilon = y_\varepsilon + \psi_\varepsilon$ принадлежит H^n и удовлетворяет неравенству $\|x - y_\varepsilon\| \leq 2 + \varepsilon_1$, т. е. $R = 2$.

Таким образом, множество V не имеет чебышевского центра относительно плоскости H^n , а множество $V - x_0$, $x_0 \in H^n$, не имеет центра относительно подпространства L^n .

Теорема 3. Если каждая из мер $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, определяющих подпространство $L^n \subset C(T)$, имеет конечный носитель, то для всякого ограниченного множества $V \subset C(T)$ существует чебышевский центр относительно подпространства L^n .

Доказательство. Пусть R — чебышевский радиус множества V относительно L^n , $T_{\mu_j} = \{t_1^j, \dots, t_{p_j}^j\}$ — носитель меры μ_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Пусть $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, а $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ — последовательность функций из L^n , для которых выполнено неравенство

$$|x(t) - y_m(t)| \leq R + \varepsilon_m, \quad x \in V, \quad t \in T, \quad m = 1, 2, \dots$$

Не теряя общности, можно считать, что последовательность $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ сходится во всех точках носителей $T_{\mu_1}, \dots, T_{\mu_n}$.

Положим

$$\alpha_k^j = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m(t_k^j), \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq k \leq p_j.$$

Нетрудно показать, что

$$N(t_k^j) - R \leq \alpha_k^j \leq n(t_k^j) + R, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq k \leq p_j. \quad (4)$$

Так как $R \geq r$, то из (3) следует, что $n(t) + R \geq N(t) - R$, $t \in T$. Поскольку функция $n(t) + R$ полунепрерывна снизу, а $N(t) - R$ — сверху, то из неравенства (4) и теоремы Катетова вытекает существование непрерывной функции $y(t)$, удовлетворяющей условиям

$$N(t) - R \leq y(t) \leq n(t) + R, \quad t \in T, \quad (5)$$

$$y(t_k^j) = \alpha_k^j, \quad k = 1, 2, \dots, p_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Легко проверить, что $y(t) \in L^n$. Так как

$$n(t) \leq x(t) \leq N(t), \quad t \in T,$$

то, учитывая неравенство (5), получим

$$\|x - y\| \leq R$$

при любом $x \in V$. Следовательно, $y(t)$ — чебышевский центр множества V относительно L^n .

Теорема 4. Чебышевский центр относительно подпространства $L^n \subset C(T)$ существует для любого ограниченного множества $V \subset C(T)$ тогда и только тогда, когда носители каждой из мер $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, определяющих подпространство L^n , конечны.

Эта теорема вытекает из теорем 2, 3 и из очевидного факта, что если подпространство L^n не обладает свойством (E), то элемент $x_0 \in C(T)$, для которого в L^n нет ближайшего, как раз является тем множеством в $C(T)$, для которого в подпространстве L^n нет чебышевского центра.

Автор благодарит А. Л. Гаркави и М. И. Кадеца за постановку задачи и полезные советы.

Адыгейский государственный
педагогический институт
Майкоп

Поступило
7 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Л. Гаркави, Изв. АН СССР, сер. матем., 26, 87 (1962). ² В. Н. Замятин, М. И. Кадец, Укр. респ. сборн., 7, 20 (1968). ³ В. Н. Замятин, Сборн. Первая научная конференция молодых ученых Адыгеи, 2, 1971. ⁴ Н. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы, ИЛ, 1962. ⁵ А. Л. Гаркави, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, 3, 641 (1967). ⁶ М. Katetov, Fund. math., 38 (1951). ⁷ Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.