

УДК 534.26

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Ю. К. КОНЕНКОВ

**О ПОСТАНОВКЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
УПРУГИХ ТЕЛ С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ***(Представлено академиком П. Я. Кочиной 22 VI 1972)*

Известная в литературе постановка задач статистической механики часто связывается с решением неоднородных уравнений движения со случайными правыми частями ⁽¹⁾. Обычно статистические характеристики этих случайных сил считаются заданными, и это нам представляется недостатком. Другим вопросом, на который необходимо обратить внимание, является вопрос о параметрах, определяющих затухание.

Чаще всего затухание берется в виде силы трения, пропорциональной скорости смещения упругого тела ⁽¹⁾. Ясно, что этот закон не отражает даже отдаленно действительных причин затухания. Ниже мы укажем некоторые возможные механизмы потерь и соответствующие уравнения, содержащие физические параметры материалов.

Более близок к реальной действительности другой прием, связанный с применением комплексного модуля Юнга (конечно, только при спектральном подходе). Недостатком этого «кибернетического» метода является несоответствие между оператором потерь и оператором, отражающим упругие силы в твердом теле. Первый получается в результате измерения для каждого конкретного тела, а второй исходит из закона Гука, который постулируется для широкого класса материалов.

Большую часть потерь при вибрациях упругих тел, погруженных в среду, составляют потери на излучение звука, если упругое тело представляет собой достаточно протяженную тонкостенную конструкцию. При этом с уменьшением толщины стенки роль потерь возрастает. Поскольку с практической точки зрения этот случай самый важный, учет потерь на излучение необходим. Этот вид потерь, как будет показано ниже (см. также работы ⁽²⁻⁵⁾), может быть отражен точно. Вязкость окружающей среды также может быть источником значительных потерь за счет возникновения поперечных пристеночных волн ⁽⁶⁻⁸⁾. И этот вид потерь поддается точному расчету ⁽⁹⁾ на основе уравнений Навье — Стокса для окружающей среды. Частотный ход потерь при этом крайне сложен.

Большую роль играют внутренние потери в материале упругого тела. Наибольшая доля этих потерь связана с теплопроводностью тонкостенной конструкции, как было указано Зинером в 1938 г. (см. ⁽⁷⁾, стр. 196). Этот механизм потерь может быть описан точно уравнениями термоупругости совместно с уравнениями теплопроводности. Частотный ход потерь в этом случае определяется физическими параметрами материала, охватывающими столь же широкий класс материалов, как и закон Гука (см. ⁽⁷⁾, стр. 186). Аналогичному описанию поддаются потери, связанные с тепловой радиацией (электромагнитное излучение нагретых тел) и с конвективным теплообменом.

В меньшей степени изучены вопросы, связанные с внутренним трением типа вязкости. Механизм трения этого вида зависит в значительной степени от микроструктуры веществ, разнообразие которых затрудняет универсальный вид уравнений; кроме того, отсутствует классификация материалов по физико-механическим свойствам трения.

В основе такой классификации должно лежать соотношение ⁽¹⁵⁾

$$\sigma^{ik} = L^{iklm} u_{lm},$$

где σ^{ik} — компоненты тензора напряжений, u_{lm} — компоненты тензора деформаций, L^{iklm} — компоненты некоторого тензора, являющиеся линейными интегро-дифференциальными операторами во времени. В результате классификации были бы найдены конкретные виды операторов L^{iklm} и указаны группы материалов, подчиняющиеся этим закономерностям. Отметим, наконец, что используемые в последнее время искусственные методы демпфирования с помощью специальных покрытий также могут быть описаны в рамках перечисленных теорий ^(16-18, 9).

Существуют другие виды потерь, которые не могут быть описаны в рамках линейной теории:

- 1) потери, связанные с сухим трением;
- 2) потери, обусловленные гистерезисными явлениями при неоднозначном соответствии между u и σ ;
- 3) конструктивные потери, включающие различные комбинации механизмов и всевозможные контактные явления (касание деталей, удары в стыках и т. д.), способствующие переходу волновой энергии в высокочастотные части спектра и их дальнейшему усиленному поглощению уже за счет перечисленных механизмов;
- 4) потери, вызванные накоплением повреждений.

Актуальность новых постановок задач статистической механики на основе анализа реальных процессов поглощения и взаимодействия мы подкрепим конкретными примерами, имеющими большое практическое значение. Рассмотрим задачу о звукоизоляции замкнутой тонкой сферической оболочки от внешнего случайного поля. Для описания движения оболочки возьмем уравнения В. З. Власова. Вначале приводим известную из литературы вспомогательную задачу о дифракции звука на сферической оболочке. Плоская монохроматическая волна $p(r, \theta, t) = p_0 \exp(ikr \cos \theta - i\omega t)$ возбуждает под оболочкой поле, которое можно записать в виде

$$p_1 = \sum_0^{\infty} P_n(\cos \theta) [h_n^{(1)}(kr) + h_n^{(2)}(kr)] \frac{\Delta_n'(\omega)}{\Delta_n(\omega)} e^{-i\omega t}, \quad \Delta_n' = |a_{ik}|, \quad \Delta_n = |b_{ik}|,$$

a_{ik} и b_{ik} имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11} = [\omega^2 R^2 / c^2 - n(n+1) + 1 - \nu], \\ a_{12} &= b_{12} = b^2(n^2 + n - 2) + 1 + \nu, \quad b_{13} = a_{14} = b_{14} = a; \\ a_{21} &= b_{21} = n(n+1)[b^2(n^2 + n - 1 + \nu) + 1 - \nu]; \\ a_{22} &= b_{22} = \omega^2 R^2 / c^2 - b^2(n+1)n[n(n+1) - 1 + \nu] - 2(1 - \nu); \\ a_{23} &= b_{23} = -\frac{R^2 h_n^{(1)}(kR)}{\rho c^2 h}; \quad a_{24} = \frac{R^2}{\rho c^2 h} \sqrt{\frac{2\pi}{kR}} \left(n + \frac{1}{2}\right) i^n J_{n+1/2}(kR); \\ b_{24} &= \frac{R^2}{\rho c^2 h} [h_n^{(1)}(kR) + h_n^{(2)}(kR)]; \quad a_{31} = b_{31} = 0; \quad a_{32} = b_{32} = \rho_0 \omega^2; \\ a_{33} &= b_{33} = -k \dot{h}_n^{(1)}(kR), \quad a_{34} = \frac{\partial}{\partial R} \left[\sqrt{\frac{2\pi}{kR}} \left(n + \frac{1}{2}\right) i^n J_{n+1/2}(kR) \right]; \\ b_{34} &= 0, \quad a_{41} = b_{41} = 0, \quad a_{42} = b_{42} = \rho_0 \omega^2, \quad a_{43} = b_{43} = 0, \\ a_{44} &= 0, \quad b_{44} = -k [\dot{h}_n^{(1)}(kR) + \dot{h}_n^{(2)}(kR)]; \end{aligned}$$

здесь через R , h , ρ , c обозначены параметры оболочки: радиус, толщина, плотность, скорость продольных волн соответственно; $k = \omega / c_0$, $b^2 = h^2 / (12R^2)$, $P_n(x)$ — полиномы Лежандра, $h_n(x)$ — сферические функции, выражаемые через функции Бесселя, c_0 и ρ_0 — параметры среды: скорость звука и плотность соответственно, ω — круговая частота колебаний (произвольный параметр задачи).

Используя дифракционное решение, переходим к основному этапу решения. Пусть плоская набегающая волна давления является случайным стационарным процессом $p_0(t)$, который формально можно записать в виде интеграла Фурье — Стильтьеса ⁽²⁾

$$p_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikr \cos \theta - i\omega t} dC_{p_0}(\omega).$$

Следовательно, поле под оболочкой можно также записать в виде

$$p_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_0^{\infty} \frac{\Delta'_n(\omega) e^{-i\omega t}}{\Delta_n(\omega)} P_n(\cos \theta) [h_n^{(1)}(kr) + h_n^{(2)}(kr)] dC_{p_0}(\omega).$$

Применительно к случайным процессам представленные разложения в рамках корреляционной теории имеют смысл только при вычислении моментов второго порядка. При этом приходится вычислять интеграл

$$\begin{aligned} \overline{p_1(t_1) p_1^*(t_2)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta'_n(\omega_1)}{\Delta_n(\omega_1)} P_n(\cos \theta) \left[h_n^{(1)}\left(\frac{\omega_1}{c_0} r\right) + h_n^{(2)}\left(\frac{\omega_1}{c_0} r\right) \right] \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Delta_m^*(\omega_2)}{\Delta_m^*(\omega_2)} P_m(\cos \theta) \left[h_m^{(1)}\left(\frac{\omega_2}{c_0} r\right) + h_m^{(2)}\left(\frac{\omega_2}{c_0} r\right) \right]^* e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} \overline{dC_{p_0}(\omega_1) dC_{p_0}^*(\omega_2)}. \end{aligned}$$

В случае, когда набегающее поле давления представляет собой стационарный случайный процесс, функция $C(\omega)$ является функцией с некоррелированным приращением, т. е.

$$\overline{dC(\omega_1) dC^*(\omega_2)} = \delta(\omega_1 - \omega_2) d\omega_1 dG(\omega_2).$$

Следовательно, получаем

$$\overline{p_1(t_1) p_1(t_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(t_1 - t_2)\omega} \left| \sum \frac{\Delta'_n(\omega)}{\Delta_n(\omega)} P_n(\cos \theta) \left[h_n^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_0} r\right) + h_n^{(2)}\left(\frac{\omega}{c_0} r\right) \right] \right|^2 dG(\omega).$$

Теорема Винера — Хинчина позволяет, таким образом, найти спектральную плотность интенсивности давления под оболочкой, выразив ее через спектральную плотность интенсивности падающей волны:

$$\frac{dG_{p_1}}{d\omega} = \left| \sum_0^{\infty} \frac{\Delta'_n(\omega)}{\Delta_n(\omega)} P_n(\cos \theta) \left[h_n^{(1)}\left(\frac{\omega r}{c_0}\right) + h_n^{(2)}\left(\frac{\omega r}{c_0}\right) \right] \right|^2 \frac{dG_{p_0}}{d\omega}.$$

Задача решена, и мы перейдем к обсуждению того, в какой степени полученное решение отвечает выдвинутому выше требованию. Мы не задавались статистическими характеристиками сил, действующих на оболочку. Эти силы были найдены в процессе решения задачи из условий взаимодействия оболочки и среды. Среди всевозможных механизмов затухания, перечисленных вначале, в данном решении учитываются только потери на излучение. Отметим попутно, что предлагаемая нами постановка статистических задач, по сравнению с ⁽¹⁾, содержит ряд преимуществ иного плана. Например, в постановке ⁽¹⁾ возникает существенное логическое затруднение с определением звукоизоляции. В данном случае открывается возможность дать строгое метрологически обоснованное определение. В качестве звукоизоляции естественно взять отношение какой-либо физической величины, которую можно измерить, характеризующей поле под оболочкой, к соответствующей величине, когда звукоизолирующего приспособления нет. В зависимости от конкретной технической проблемы выбранный для характеристики поля параметр может быть интегральным (энергия звукового поля в данном объеме) или локальным, зависящим даже от частоты и координаты (спектральная плотность интенсивности). Например, если мы измеряем спектральную плотность интенсивности в центре под сферой, то в качестве коэффициента звукоизоляции естественно принять величину $\alpha^2 = dG_{p_2} / dG_{p_0}$ при $r = 0$.

Используя выведенные выше формулы, находим

$$\alpha^{-2} = \left\{ \frac{\rho c^2 k h}{\rho_0 c_0^2} \left[\frac{\omega^2 R^2}{c^2} - 2(1 - \nu) \right] \frac{(\Omega^2 - 1) \sin 2\Omega + 2\Omega \cos 2\Omega}{2\Omega^4} + 1 \right\}^2 + \\ + \left\{ \frac{\rho c^2 k h}{\rho_0 c_0^2} \left[\frac{\omega^2 R^2}{c^2} - 2(1 - \nu) \right] \left(\frac{\cos^2 \Omega}{\Omega^2} - \frac{\sin^2 \Omega}{\Omega^4} - \frac{\sin 2\Omega}{\Omega^3} \right) \right\}^2, \quad \Omega = \omega R / c_0.$$

В среднем звукоизоляция растет с частотой, испытывая провалы возле собственных частот системы. При экспериментальном наблюдении провалы обычно не наблюдаются, так как стандартная аппаратура дает не спектральную плотность интенсивности, а интегралы от нее по некоторым промежуткам частот (в одну треть октавы, в октаву и т. д.) ^(11, 12), что приводит к усреднению всей картины.

Рассмотренный случай характерен тем, что источники случайного поля находились вдали вне оболочки и можно было ограничиться заданием статистических параметров падающей волны. Практический интерес представляет также другой случай, когда необходимо задаваться статистическими характеристиками самого источника.

В качестве второго примера рассмотрим задачу о внутренней звукоизоляции, взяв для разнообразия цилиндрическую оболочку. Соответствующее решение регулярной задачи возьмем из ⁽¹¹⁾ и ⁽¹²⁾. Пусть на оси цилиндрической оболочки расположен точечный мультиполь n -го порядка, изучающий случайное во времени поле, не зависящее от осевой координаты z . Повторяя рассуждения предыдущей задачи, получим для величины $\alpha^2 = dG_p / dG_{p_0}$, где $dG_p / d\omega$ — спектральная плотность интенсивности давления вне оболочки, а $dC_{p_0} / d\omega$ — соответствующая величина для свободного (открытого) излучателя, когда оболочки нет:

$$\alpha^{-2} = \left\{ \frac{n^2}{\omega^2 R^2 / c^2 - n^2} - \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2 + \frac{n^2 h^2}{12 R^2} + 1 \right\}^2 \left(\frac{\pi \rho c^2 h}{2 \rho_0 c_0^2 R} \right)^2 \bar{J}_n^4 \left(\frac{\omega R}{c_0} \right) + \\ + \left\{ 1 - \left[\frac{n^2}{(\omega R / c)^2 - n^2} - \left(\frac{\omega R}{c} \right)^2 + \frac{n^2 h^2}{12 R^2} + 1 \right] \left(\frac{\pi \rho c^2 h}{2 \rho_0 c_0^2 R} \right)^2 j_n \left(\frac{\omega R}{c_0} \right) \dot{N}_n \left(\frac{\omega R}{c_0} \right) \right\}^2.$$

Приведенные примеры достаточно ярко иллюстрируют возможность новой постановки задач динамики тонкостенной конструкции при статистическом анализе и очевидные преимущества этого подхода.

Московский авиационный институт
им. С. Орджоникидзе

Поступило
30 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Болотин, Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин, «Наука», 1966, стр. 996.
- ² С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, «Наука», 1966.
- ³ Ю. К. Коненков, Науч. работы Инст. охраны тр. ВЦСПС, в. 66, 1970.
- ⁴ Ю. К. Коненков, И. Ш. Рахматулин, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 1, 146 (1970).
- ⁵ Э. И. Григолюк, Тр. VII Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек, Днепропетровск, 1969, «Наука», 1970, стр. 755.
- ⁶ Дж. В. Стретт (Лорд Рэлей), Теория звука, 2, М., 1955.
- ⁷ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория упругости, «Наука», 1965.
- ⁸ Ю. К. Коненков, Акустич. журн., 8, в. 3 (1962).
- ⁹ Ю. К. Коненков, И. Ш. Рахматулин, К вопросу о вибрациях пластин, соприкасающихся с вязкой жидкостью, под действием случайных сил, Матер. VI Всесоюз. конф., М., 1968.
- ¹⁰ Л. П. Борисов, Сборн. Вибрации и шумы, «Наука», 1969, стр. 3.
- ¹¹ Т. С. Олейникова, Ю. К. Коненков, Научн. тр. Инст. охраны тр. ВЦСПС, в. 62, 1969, стр. 100.
- ¹² Т. С. Олейникова, Ю. К. Коненков, Научн. работы инст. охраны труда ВЦСПС, в. 65, 1970, стр. 81.
- ¹³ Н. Е. Кочин, Н. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. 1, Изд. 5, Л.—М., 1955.
- ¹⁴ Г. Кольский, Волны напряжения в твердых телах, ИЛ, 1955.
- ¹⁵ Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд. АН СССР, 1961.
- ¹⁶ Н. И. Наумкина, М. И. Палей и др., Вибропоглощающие мастичные материалы. Докл. VI Всесоюз. Акустич. конф., 1968.
- ¹⁷ С. М. Рытов, В. В. Владимирский, М. Д. Галанин, ЖЭТФ, 8, 50, 614 (1938).
- ¹⁸ А. Н. Колмогоров, ДАН, 32, в. 1, 19 (1944).
- ¹⁹ И. И. Клюкин, А. Е. Колесников, Акустические измерения в судостроении, Л., 1966.