Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 6

УДК 519.8

МАТЕМАТИКА

А. Ф. КОНОНЕНКО, Н. С. КУКУШКИН

СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ В ИГРАХ С ФИКСИРОВАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ХОДОВ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 14 VII 1972)

В работе ([1]) сформулирован новый класс игр двух лиц и приводится их решение в чистых стратегиях.

В настоящей работе приводится решение аналогичной игры в смешанных стратегиях при различной степени информированности игрока 1 о действиях игрока 2.

Пусть множества выборов игроков задаются метрическими компактами X_1, X_2, на произведении которых заданы непрерывные платежные функции $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$. Через P_i, $i=1, 2$, будем обозначать множество всех вероятностных мер на X_i или, что то же самое, множество смешанных стратегий i-го игрока. Мы будем предполагать, что каждый из игроков согласен, даже в случае применения смешанных стратегий партнером, принять в качестве критерия математическое ожидание своего выигрыша.

Следуя ([1]), будем рассматривать игры, в которых игрок 1, рассчитывая на информацию о поведении игрока 2, заранее сообщает ему свои ответы; последний, получив это сообщение, максимизирует свой выигрыш, который зависит теперь только от его выбора. Поскольку мы, в отличие от ([1]), допускаем применение игроками смешанных стратегий, у нас возникает, по крайней мере, три различных случая информированности игрока 1 о выборе игрока 2.

Случай 1. Игрок 1 будет знать и смешанную стратегию $(p_2 \in P_2)$, и каждую случайную реализацию $x_2 \in X_2$.

Случай 2. Игрок 1 будет знать только $x_2 \in X_2$.

Случай 3. Игрок 1 будет знать только смешанную стратегию игрока 2 $(p_2 \in P_2)$.

В дальнейшем будет использована следующая

Лемма. *Пусть Q — метрический компакт, $g_1(x)$ и $g_2(x)$ определены и непрерывны на Q, P — множество всех вероятностных мер на Q,*

$$P_l = \left\{p \in P \,\Big|\, \int\limits_Q g_2(x)\,dp > l,\ l \text{ фиксировано}\right\},$$

$P^{(2)}$ — подмножество P, состоящее из мер, сосредоточенных не более чем в двух точках, $P_l^{(2)} = P_l \cap P^{(2)}$; тогда

$$\sup_{p \in P_l^{(2)}} \int\limits_Q g_1(x)\,dp = \sup_{p \in P_l^{(2)}} \int\limits_Q g_1\,(x) dp.$$

Доказательство. Множество P выпукло, ограничено и замкнуто в пространстве всех (в том числе и знакопеременных) мер на Q, следовательно, компактно в $*$-слабой топологии этого пространства.

Поэтому доказательство леммы следует из двух фактов:

а) Пусть N — выпуклый компакт, g — линейный непрерывный функционал на N, $B = \{x \in N \,|\, g(x) \geqslant l\}$. Тогда любая крайняя точка B является выпуклой комбинацией не более чем двух крайних точек N.

б) Крайними точками множества P являются меры, сосредоточенные в одной точке, и только они.

Найдем наибольший гарантированный результат и оптимальную стратегию в каждом из трех случаев.

1. Поскольку игрок 1 рассчитывает на информацию и о смеси, и о конкретной реализации выбора игрока 2, его смешанная стратегия окажется функцией переменных p_2 и x_2: $p_1 = \pi(p_2, x_2)$. Если игрок 1 решил использовать функцию π, а игрок 2 выбрал смешанную стратегию $p_2 \in P_2$, то платеж i-му игроку запишется в виде

$$F_i^{(1)}(\pi, p_2) = \int\limits_{X_2} \left(\int\limits_{X_1} f_i(x_1, x_2)\, d(\pi(p_2, x_2)) \right) dp_2, \quad i = 1, 2.$$

Введем обозначения:

$$L = \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2),$$

$$E = \{x_2 \in X_2 \mid \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2) = L\},$$

$$M = \min_{x_2 \in E} \max_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2), \quad D = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid f_2(x_1, x_2) > L\},$$

$$D' = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid f_2(x_1, x_2) \geqslant L\},$$

P — множество всех вероятностных мер на $X_1 \times X_2$.

$$D^{(1)} = \left\{ p \in P \,\Big|\, \int\limits_{X_1 \times X_2} f_2(x_1, x_2)\, dp > L \right\}; \quad K_1 = \sup_{p \in D^{(1)}} \int\limits_{X_1 \times X_2} f_1(x_1, x_2)\, dp.$$

Отметим, что $D = \varnothing \Leftrightarrow D^{(1)} = \varnothing$.

Теорема 1. *Верхняя грань гарантированных результатов игрока 1 в вышеописанной игре равна M, если $D = \varnothing$, и K_1 в противном случае.*

Доказательство. Первое утверждение доказывается так же, как и в ([1]). Заметим, что в этом случае игроку 1 не нужно применять смешанные стратегии.

Пусть $D \neq \varnothing$, тогда $D^{(1)} \neq \varnothing$ и $K_1 > -\infty$. По лемме для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x_i', x_i'' \in X_i$, $q_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$, что $q_1 + q_2 = 1$,

$$q_1 f_2(x_1', x_2') + q_2 f_2(x_1'', x_2'') > L,$$

$$q_1 f_1(x_1', x_2') + q_2 f_1(x_1'', x_2'') > K_1 - \varepsilon.$$

Предположим, что $x_2' \neq x_2''$ и обозначим через p_2^* смешанную стратегию игрока 2, состоящую в выборе x_2' с вероятностью q_1 и x_2'' с вероятностью q_2. Тогда игроку 1 гарантирован (может быть, с точностью ε) платеж K_1, если он применит стратегию

$$\pi^*(p_2, x_2) = \begin{cases} H(x_1'), & \text{если } p_2 = p_2^*, \quad x_2 = x_2', \\ H(x_1''), & \text{если } p_2 = p_2^*, \quad x_2 = x_2'', \\ H(\tilde{x}_1^{\text{н}}), & \text{если } p_2 \neq p_2^*, \end{cases}$$

где $H(x_1)$ означает выбор x_1 с вероятностью 1, $\tilde{x}_1^{\text{н}} = x_1^{\text{н}}(x_2)$ — стратегия наказания (см. ([1])), определяемая из условия

$$f_2(\tilde{x}_1^{\text{н}}, x_2) = \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2).$$

Пусть теперь $x_2' = x_2'' = x_2^0$. В этом случае игрок 1 может гарантировать себе платеж K_1 (может быть, с точностью ε), если он применит стратегию

$$\pi^0(p_2, x_2) = \begin{cases} \text{с вероятностью } q_1 \text{ выбирается } x_1', & \\ \text{с вероятностью } q_2 \text{ выбирается } x_1'', & \text{если } p_2 = H(x_2^0), \\ H(\tilde{x}_1^{\text{н}}), & \text{если } p_2 \neq H(x_2^0). \end{cases}$$

Покажем теперь, что никакая стратегия π не может гарантировать игроку 1 больше K_1 (в случае $D \neq \varnothing$). В самом деле: если игрок 2 имеет возможность получить платеж, больший L, то игрок 1 получит не больше K_1 по определению. Если же стратегия игрока 1 такова, что игроку 2 гарантируется не более L, то ничто не помешает игроку 2 выбрать $x_2 \in E$; при этом игроку 2 гарантируется L, а игрок 1 не может рассчитывать на выигрыш, больший $M \leqslant \max\limits_{(x_1, x_2) \in D'} f_1(x_1, x_2) \leqslant K_1$.

Следствие 1. *Пусть* $K_1 \neq F^0 = \max\limits_{x_1 \in X_1} \max\limits_{x_2 \in X_2} f_1(x_2, x_2)$. *Тогда платеж игрока 2 превосходит L лишь на сколь угодно малую величину, определяемую игроком* 1.

Следствие 2. *Смешанные стратегии применяет не более чем один игрок. При* $x_2' \neq x_2''$ *смешанные стратегии применяет игрок* 2, *при* $x_2' = x_2''$ — *игрок* 1. *Если же* $D = \varnothing$, *то оба игрока используют чистые стратегии.*

Замечание 1. Игрок 1, обладая правом первого хода и информацией о стратегии игрока 2, извлекает выгоду не только от своих возможностей по применению смешанных стратегий, но и от этих возможностей игрока 2.

Замечание 2. Отличительной чертой полученных стратегий является то, что даже при наличии у игрока 1 информации о выборе $x_2 \in X_2$ игроку 2 оказывается выгодным применять смешанную стратегию! (ср., например, с ([2])). С другой стороны, игроку 1 также выгодно применять смешанную стратегию вместо максимизации своего платежа при известной ему $x_2 \in X_2$.

2. Пусть теперь игрок 1 рассчитывает иметь информацию только о конкретной реализации выбора игрока 2, т. е. его смешанная стратегия описывается функцией от x_2: $p_1 = T(x_2)$. В данном случае платеж i-го игрока запишется в виде

$$F_i^{(2)}(T, x_2) = \int\limits_{X_1} f_i(x_1, x_2)\, d(T(x_2)).$$

Введем обозначения:

$$D^{(2)}(x_2) = \left\{p_1 \in P_1 \,\middle|\, \int\limits_{X_1} f_2(x_1, x_2)\, dp_1 > L\right\},$$

$$K_2^* = \sup_{x_2 \in X_2} \sup_{p_1 \in D^{(2)}(x_2)} \int\limits_{X_1} f_1(x_1, x_2)\, dp_1.$$

Аналогично теореме 1 может быть доказана

Теорема 2. *Наибольший гарантированный результат игрока* 1 *равен* $\max(M, K_2^*)$, *причем результат* M *может быть гарантирован использованием только чистых стратегий, как и в* ([1]), *а* K_2^* *гарантируется стратегией* T^0:

$$T^0 = \begin{cases} \text{с вероятностью } p_1 \text{ выбирается } x_1', & \\ \text{с вероятностью } p_2 \text{ выбирается } x_1'', & \text{если } x_2 = x_2^0, \\ H(\tilde{x}_1^{\text{н}}), & \text{если } x_2 \neq x_2^0, \end{cases}$$

где $p_1, p_2, x_1', x_2', x_2^0$ *удовлетворяют условиям*

$$p_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2; \quad p_1 + p_2 = 1,$$
$$K_2^* \leqslant p_1 f_1(x_1', x_2^0) + p_2 f_1(x_1'', x_2^0) + \varepsilon.$$

3. Рассмотрим теперь случай, когда игрок 1 будет иметь информацию лишь о p_2, т. е. $p_1 = \Phi(p_2)$. Тогда платеж i-го игрока запишется в виде

$$F_i^{(3)}(p_1, p_2) = \int\limits_{X_1 \times X_2} f_i(x_1, x_2)\, dp_1\, dp_2.$$

Введем обозначения:

$$L^* = \max_{p_2 \in P_2} \min_{p_1 \in P_1} F_2^{(3)}(p_1, p_2),$$

$$E^* = \{p_2 \in P_2 \mid \min_{p_1 \in P_1} F_2^{(3)}(p_1, p_2) = L^*\},$$

$$M^* = \min_{p_2 \in E^*} \max_{p_1 \in P_1} F_1^{(3)}(p_1, p_2),$$

$$D^* = \{p_1 \in P_1, p_2 \in P_2 \mid F_2^{(3)}(p_1, p_2) > L^*\}, \quad K^* = \sup_{(p_1, p_2) \in D^*} F_1^{(3)}(p_1, p_2).$$

Мы имеем дело здесь с такой же игрой, как и в ([1]), со множествами стратегий P_i и платежными функциями $F_i^{(3)}$. Из ([1]) следует

Теорема 3. *Наибольший гарантированный результат игрока* 1 *в этой игре равен* $\max(K^*, M^*)$.

Замечание. Очевидным образом стратегии $\tilde{p}_1^{\text{н}}$ и $\tilde{p}_1^{\text{а}}$ можно выбрать одноточечными. Стратегии же $\overset{0}{\tilde{p}}_1$ и $\overset{0}{\tilde{p}}_2$ (p_1^{ε} и p_2^{ε}) можно выбрать не более чем двухточечными.

4. В работе ([1]) уже отмечалось, что формулировка игры с фиксированной последовательностью ходов позволяет избежать затруднений по выработке решений, основанных на точках равновесия. (Заметим, что, при заданных ограничениях на множество стратегий и функции выигрыша, всегда существует, по крайней мере в смешанных стратегиях, точка равновесия.) Отмеченные трудности связаны с наличием нескольких точек равновесия в случае, когда игрокам выгодны различные точки.

Заметим также, что определение и реализация смешанных стратегий для игр в новой постановке весьма просты, так как смешанная стратегия каждого из игроков имеет структуру двухточечного распределения.

Вычислительный центр Академии наук СССР
Москва

Поступило
11 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. Б. Гермейер, ДАН, 198, № 5 (1971). [2] Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, Теория игр и экономическое поведение, «Наука», 1970.