

УДК 539.1

В.Н. КАПШАЙ, Ю.А. ГРИШЕЧКИН

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ С НЕКОТОРЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Получены точные решения релятивистских одномерных интегральных уравнений, описывающих рассеяние двух частиц с потенциалами « n -я производная дельта-функции» для $n = 1, 2, 3$. На основании полученных решений найдены коэффициенты прохождения и отражения и исследованы некоторые их свойства.

Ключевые слова: интегральное уравнение, функция Грина, релятивистское конфигурационное представление, быстрота, дельта-функция, коэффициент отражения, коэффициент прохождения.

Введение

Релятивистские двухчастичные уравнения квантовой теории поля [1, 2] могут быть сформулированы в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) [3] в виде разностных или интегральных. Функции Грина (ФГ) различных типов этих уравнений для одномерного случая были получены в [4], а для трёхмерного в [5]. Точные решения таких интегральных уравнений представляют собой сложную задачу, однако для некоторых потенциалов она может быть решена, например, обобщённым методом Фробениуса [6]. Для потенциалов, являющихся суперпозициями дельта-функций, такие решения [7, 8] аналогичны соответствующим нерелятивистским.

Отличительной особенностью релятивистских δ -потенциалов, задаваемых в РКП, является их более слабая сингулярность по сравнению с δ -потенциалами нерелятивистской теории. Это обстоятельство позволяет рассмотреть в релятивистском подходе потенциалы, задаваемые производными δ -функции. В нерелятивистской теории строгое рассмотрение точечных потенциалов требует привлечения сложной теории самосопрежённых расширений дифференциальных операторов [9, 10]. С другой стороны, рассмотрение потенциалов типа «производная от δ -функции» в РКП не связано с принципиальными трудностями. Фактически, это происходит благодаря модификации кинетического члена и ФГ в импульсном представлении при больших значениях быстроты (или при малых значениях канонически ей сопряжённой релятивистской координаты).

Релятивистским обобщением одномерного интегрального уравнения для волновой функции (для состояния рассеяния двух частиц) является уравнение вида [7]

$$\psi_j(\rho) = \exp(i\chi_q m\rho) + \int_{-\infty}^{+\infty} g_j(\rho - \rho') V(\rho') \psi_j(\rho') d\rho', \quad (1)$$

где $\psi_j(\rho)$ – волновая функция; χ_q – быстрота; m – масса каждой из частиц; ρ – координата в РКП; $V(\rho)$ – потенциал; $g_j(\rho - \rho')$ – релятивистская ФГ. Индекс j соответствует выбору варианта ФГ. В качестве ФГ будем рассматривать выражения, соответствующие четырём вариантам квазипотенциальных уравнений: уравнение Логанова – Тавхелидзе ($j = 1$), уравнение Кадышевского ($j = 2$), модифицированное уравнение Логанова – Тавхелидзе ($j = 3$), модифицированное уравнение Кадышевского ($j = 4$) [1–3]. Эти функции имеют вид [4, 5]

$$\begin{aligned} g_1(\rho) &= \frac{-i}{K_q^{(1)}} \frac{\text{sh}[(\pi/2 + i\chi_q)m\rho]}{\text{sh}(\pi m\rho/2)}, & g_2(\rho) &= \frac{-i}{K_q^{(2)}} \frac{\text{sh}[(\pi + i\chi_q)m\rho]}{\text{sh}(\pi m\rho)} + \frac{(4m \text{ch}\chi_q)^{-1}}{\text{ch}(\pi m\rho/2)}, \\ g_3(\rho) &= \frac{-i}{K_q^{(3)}} \frac{\text{ch}[(\pi/2 + i\chi_q)m\rho]}{\text{ch}(\pi m\rho/2)}, & g_4(\rho) &= \frac{-i}{K_q^{(4)}} \frac{\text{sh}[(\pi + i\chi_q)m\rho]}{\text{sh}(\pi m\rho)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где используются следующие обозначения:

$$K_q^{(1)} = K_q^{(2)} = m \text{sh} 2\chi_q; \quad K_q^{(3)} = K_q^{(4)} = 2m \text{sh} \chi_q. \quad (3)$$

В дальнейшем нам понадобятся асимптотики ФГ и их производных при $\rho \rightarrow \pm\infty$:

$$g_j^{(s)}(\rho) \Big|_{\rho \rightarrow \pm \infty} \cong \frac{-i(\pm i\chi_q m)^s}{K_q^{(j)}} \exp(\pm i\chi_q m \rho), \quad (4)$$

где s – порядок производной по ρ (случай $s = 0$ соответствует асимптотике самой ФГ).

Решение релятивистского уравнения с потенциалом « n -я производная дельта-функции»

В работах [7, 8] были найдены решения уравнения (1) с потенциалом $V(\rho) = V_0 \delta(\rho)$, а также с суперпозициями потенциалов такого типа. В настоящей работе найдены решения уравнения (1) с потенциалами вида

$$V(\rho) = V_n \delta^{(n)}(\rho), \quad (5)$$

где V_n – вещественная постоянная ($n = 1, 2, 3, \dots$). Подстановка потенциала « n -я производная δ -функции» в уравнение (1) приводит к равенству

$$\psi_j(\rho) = \exp(i\chi_q m \rho) + (-1)^n V_n \left[\left(\frac{\partial}{\partial \rho'} \right)^n (g_j(\rho - \rho') \psi_j(\rho')) \right]_{\rho'=0}, \quad (6)$$

которое с учётом формулы для производной n -го порядка от произведения двух функций даёт

$$\psi_j(\rho) = \exp(i\chi_q m \rho) + V_n \sum_{f=0}^n (-1)^f C_n^f g_j^{(n-f)}(\rho) \psi_j^{(f)}(0), \quad (7)$$

где C_n^f – биномиальные коэффициенты. Для определения величин $\psi_j^{(f)}(0)$ необходимо найти производные формулы (7) до n -го порядка включительно, взять эти $n+1$ формул при $\rho = 0$ и решить возникающую при этом алгебраическую систему уравнений относительно $\psi_j^{(f)}(0)$. Принципиальная возможность осуществления этой процедуры обусловлена свойством бесконечной дифференцируемости всех релятивистских ФГ (2) в точке $\rho = 0$. Нерелятивистская одномерная ФГ уравнения Шрёдингера $g_0(x) = -i \exp(iq|x|)/2q$ этим свойством, очевидно, не обладает.

Асимптотики волновой функции (7) при $\rho \rightarrow \pm \infty$ с учётом (4) запишем в виде

$$\psi_j(\rho) \Big|_{\rho \rightarrow \pm \infty} \cong \exp(i\chi_q m \rho) + B_j^\pm \exp(\pm i\chi_q m \rho), \quad (8)$$

где введены обозначения

$$B_j^\pm = \frac{i}{K_q^{(j)}} V_n \sum_{f=0}^n (-1)^{f+1} C_n^f (\pm i\chi_q m)^{n-f} \psi_j^{(f)}(0). \quad (9)$$

Коэффициенты отражения R_j и прохождения D_j определяются через $B_j^\pm$ следующим образом:

$$R_j = |B_j^-|^2, \quad D_j = |B_j^+ + 1|^2. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь решения (1) для некоторых первых значений n . При $n = 1$ имеем

$$\psi_j(\rho) = \exp(i\chi_q m \rho) + V_1 \left\{ \psi_j(0) g_j^{(1)}(\rho) - \psi_j^{(1)}(0) g_j(\rho) \right\}. \quad (11)$$

Подставив затем найденные указанным выше образом значения $\psi_j(0)$ и $\psi_j^{(1)}(0)$ в выражения для $B_j^\pm$ (в данном случае $B_j^\pm = V_1 \left\{ i\psi_j^{(1)}(0) \pm \chi_q m \psi_j(0) \right\} / K_q^{(j)}$), получим ($g_j^{(n)} = g_j^{(n)}(0)$):

$$B_j^- = V_1 \frac{iV_1 (g_j^{(2)} + (\chi_q m)^2 g_j^{(0)}) - 2\chi_q m}{K_q^{(j)} (1 + V_1^2 g_j^{(0)} g_j^{(2)})}, \quad B_j^+ = iV_1^2 \frac{g_j^{(2)} - (\chi_q m)^2 g_j^{(0)}}{K_q^{(j)} (1 + V_1^2 g_j^{(0)} g_j^{(2)})}. \quad (12)$$

Находя константы $g_j^{(0)}$, $g_j^{(2)}$ для каждого j , получим явные выражения для коэффициентов прохождения и отражения.

Коэффициенты D_j , соответствующие всем четырём ФГ:

$$D_1 = \frac{(3\pi^2 \operatorname{sh}^2 2\chi_q - V_1^2 \chi_q^2 (\pi^2 + 4\chi_q^2))^2}{(3\pi^2 \operatorname{sh}^2 2\chi_q + V_1^2 \chi_q^2 (5\pi^2 - 4\chi_q^2))^2 + V_1^4 \pi^2 \chi_q^2 (8\chi_q^2 - \pi^2)^2},$$

$$D_2 = \frac{d_-^2}{d_+^2 + d^2}, \quad D_3 = \frac{(4\text{sh}^2 \chi_q - V_1^2 \chi_q^2)^2}{(4\text{sh}^2 \chi_q + V_1^2 \chi_q^2)^2 + V_1^4 \pi^2 \chi_q^2},$$

$$D_4 = \frac{(12\pi^2 \text{sh}^2 \chi_q - V_1^2 \chi_q^2 (\pi^2 + \chi_q^2))^2}{(12\pi^2 \text{sh}^2 \chi_q + V_1^2 \chi_q^2 (5\pi^2 - \chi_q^2))^2 + 4V_1^4 \pi^2 \chi_q^2 (2\chi_q^2 - \pi^2)^2}, \quad (13)$$

где

$$d_{\pm} = 48\pi^2 \text{sh}^2 2\chi_q + V_1^2 [(2\chi_q + \pi \text{sh} \chi_q)(8\chi_q(2\pi^2 - \chi_q^2) - 3\pi^3 \text{sh} \chi_q) \pm 48\pi^2 \chi_q^2],$$

$$d = 6\pi^2 (\pi^2 + 4\chi_q^2) \text{sh} \chi_q + 32\pi \chi_q (2\chi_q^2 - \pi^2).$$

Коэффициенты отражения:

$$R_1 = V_1^2 \frac{36\pi^4 \chi_q^2 \text{sh}^2 2\chi_q + V_1^2 \pi^2 \chi_q^2 (\pi^2 + 4\chi_q^2)^2}{[3\pi^2 \text{sh}^2 2\chi_q + V_1^2 \chi_q^2 (5\pi^2 - 4\chi_q^2)]^2 + V_1^4 \pi^2 \chi_q^2 (8\chi_q^2 - \pi^2)^2},$$

$$R_2 = \frac{r_1^2 + r_-^2}{r_+^2 + r_2^2}, \quad R_3 = V_1^2 \frac{16\chi_q^2 \text{sh}^2 \chi_q + V_1^2 \pi^2 \chi_q^2}{[4\text{sh}^2 \chi_q + V_1^2 \chi_q^2]^2 + V_1^4 \pi^2 \chi_q^2},$$

$$R_4 = V_1^2 \frac{144\pi^4 \chi_q^2 \text{sh}^2 \chi_q + 4V_1^2 \pi^2 \chi_q^2 (\pi^2 + \chi_q^2)^2}{[12\pi^2 \text{sh}^2 \chi_q + V_1^2 \chi_q^2 (5\pi^2 - \chi_q^2)]^2 + 4V_1^4 \pi^2 \chi_q^2 (2\chi_q^2 - \pi^2)^2}, \quad (14)$$

где

$$r_1 = 384V_1 \pi^2 \chi_q \text{sh} 2\chi_q \text{ch}^2 \chi_q, \quad r_2 = 192\pi^2 \text{sh}^2 2\chi_q \text{ch}^2 \chi_q +$$

$$+ V_1^2 [64\chi_q^2 (5\pi^2 - \chi_q^2) \text{ch}^2 \chi_q + 4\pi \chi_q (5\pi^2 - 4\chi_q^2) \text{sh} 2\chi_q \text{ch} \chi_q - 3\pi^4 \text{sh}^2 2\chi_q],$$

$$r_{\pm} = 4V_1^2 \pi \text{ch} \chi_q [3\pi(4\chi_q^2 \pm \pi^2) \text{sh} 2\chi_q + 16\chi_q (3\chi_q^2 \pm (\chi_q^2 - 2\pi^2)) \text{ch} \chi_q].$$

Результаты численного расчёта приведенных в (14) коэффициентов отражения, проделанного с помощью пакета Mathematica, показаны на рис. 1 (номер кривой соответствует индексу j ФГ). Отметим, что мы полагаем $m=1$ во всех численных расчётах.

Обратимся теперь к случаю $n=2$. Для потенциала «вторая производная дельта-функции» формула (7) принимает вид

$$\psi_j(\rho) = \exp(i\chi_q m \rho) + V_2 \{g_j^{(2)}(\rho) \psi_j(0) - 2g_j^{(1)}(\rho) \psi_j^{(1)}(0) + g_j(\rho) \psi_j^{(2)}(0)\}. \quad (15)$$

Находя константы $\psi_j(0)$, $\psi_j^{(1)}(0)$, $\psi_j^{(2)}(0)$ для амплитуд $B_j^{\pm}$, получаем

$$B_j^{\pm} = \frac{iV_2}{K_q^{(j)} \Delta_j} [(\chi_q m)^2 \Delta_{(1)j} \pm 2i\chi_q m \Delta_{(2)j} - \Delta_{(3)j}], \quad (16)$$

где детерминанты, возникающие при решении системы уравнений для $\psi_j^{(f)}(0)$, таковы:

$$\Delta_j = (1 + 2V_2 g_j^{(2)}) (V_2^2 g_j g_j^{(4)} - (1 - V_2 g_j^{(2)})^2); \quad \Delta_{(1)j} = (1 + 2V_2 g_j^{(2)}) (V_2 (g_j^{(2)} + (\chi_q m)^2 g_j) - 1);$$

$$\Delta_{(2)j} = i\chi_q m (V_2^2 g_j g_j^{(4)} - (1 - V_2 g_j^{(2)})^2); \quad \Delta_{(3)j} = (1 + 2V_2 g_j^{(2)}) ((\chi_q m)^2 (1 - V_2 g_j^{(2)}) - V_2 g_j^{(4)}).$$

Выражения для амплитуд, коэффициентов отражения и прохождения для конкретных ФГ имеют громоздкий вид, поэтому приведём лишь коэффициент отражения для случая $j=3$:

$R_3 = f_1^2 (f_2^2 + f_3^2)^{-1}$, где

$$f_1 = 8mV_2 \chi_q^2 \text{sh}^2 \chi_q + m^2 V_2^2 \pi^3 \chi_q \text{sh} \chi_q + m^3 V_2^3 \pi^2 \chi_q^2 (\chi_q^2 + \pi^2),$$

$$\begin{aligned}
f_2 &= 4 \operatorname{sh}^3 \chi_q + m^2 V_2^2 \chi_q^2 (4 \chi_q^2 - 3 \pi^2) \operatorname{sh} \chi_q + 2 m^3 V_2^3 \pi^3 \chi_q^3, \\
f_3 &= m^2 V_2^2 \pi \chi_q (\pi^2 + 8 \chi_q^2) \operatorname{sh} \chi_q + m^3 V_2^3 \pi^2 \chi_q^2 (\pi^2 - \chi_q^2).
\end{aligned} \quad (17)$$

На рис. 2 проиллюстрирована зависимость всех коэффициентов отражения от быстроты.

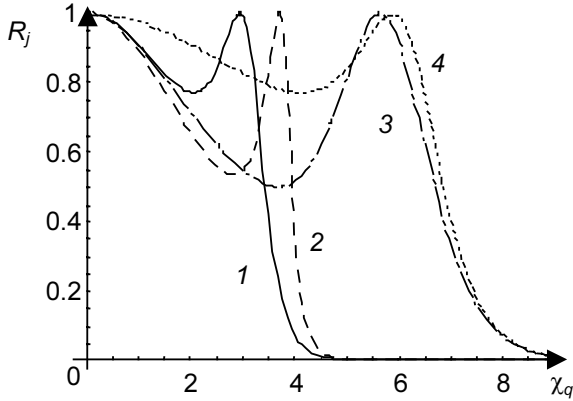


Рис. 1. Зависимость коэффициента отражения от быстроты для потенциала «производная дельта-функции» при $V_1 = 50$

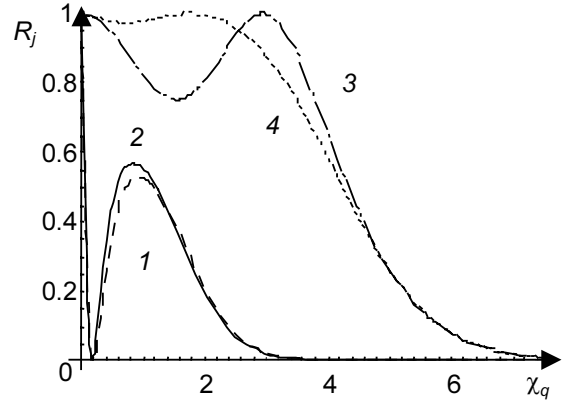


Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения от быстроты для потенциала «вторая производная дельта-функции» при $V_2 = -0,8$

Теперь рассмотрим случай $n = 3$. Формула (7) для этого потенциала имеет вид

$$\begin{aligned}
\psi_j(\rho) &= \exp(i\chi_q m \rho) + V_3 \{g_j^{(3)}(\rho) \psi_j(0) - 3g_j^{(2)}(\rho) \psi_j^{(1)}(0) + \\
&\quad + 3g_j^{(1)}(\rho) \psi_j^{(2)}(0) - g_j(\rho) \psi_j^{(3)}(0)\},
\end{aligned} \quad (18)$$

а выражения для амплитуд (10)

$$B_j^\pm = \frac{iV_3}{K_q^{(j)}} \left[\psi_j^{(3)}(0) \mp 3i(\chi_q m) \psi_j^{(2)}(0) - 3(\chi_q m)^2 \psi_j^{(1)}(0) \pm i(\chi_q m)^3 \psi_j(0) \right]. \quad (19)$$

Найдя константы $\psi_j(0)$, $\psi_j^{(1)}(0)$, $\psi_j^{(2)}(0)$, $\psi_j^{(3)}(0)$ вышеуказанным методом и подставив их в (19), получим формулы для амплитуд $B_j^\pm$. Явный вид этих формул и формул для коэффициентов отражения и прохождения мы не приводим в силу их громоздкости.

Некоторые свойства коэффициентов отражения и прохождения

Можно показать, что для рассмотренных потенциалов (как и для потенциала $V(\rho) = V_0 \delta(\rho)$ [7]) коэффициенты D_j и R_j связаны друг с другом тождеством $D_j + R_j = 1$ для всех j . Простой анализ показывает, что это тождество является следствием свойства производных всех ФГ:

$$\operatorname{Im} g_j^{(2N)} = (-1)^{N+1} (\chi_q m)^{2N} \frac{1}{K_q^{(j)}}. \quad (20)$$

При этом для случая потенциала (5) существенными оказываются свойства (20) с $N = 0, 1, 2, \dots, n$.

На рис. 1 и 2, показывающих зависимости $R_j(\chi_q)$, и из выражений (14), (17) видно, что при $\chi_q \rightarrow \infty$ во всех случаях $R_j \rightarrow 0$. Однако, как видно из графиков, обращение коэффициента отражения в ноль (полное прохождение) возможно и при конечных значениях быстроты налетающей частицы χ_q . Аналогично, из графиков видно, что в пределе $\chi_q \rightarrow 0$ во всех случаях коэффициент $R_j \rightarrow 1$. Однако обращение коэффициента R_j в единицу (полное отражение) возможно для всех рассмотренных потенциалов и ФГ и при ненулевых значениях χ_q . Изучим теперь условия полного прохождения и полного отражения более детально. Можно показать, что условия существования

полного прохождения и полного отражения для рассмотренных здесь n и j выполняются при некотором соотношении между параметрами $V_{n(j)}$, m и χ_q . Так, для потенциала $V(\rho) = V_2 \delta^{(2)}(\rho)$ для всех j условия полного прохождения принимают вид

$$V_{2(1)}m = \frac{3\pi \operatorname{sh} 2\chi_q}{4\chi_q [(3\pi^2 + 4\chi_q^2)^2 \chi_q^2 + \pi^6]} \left[16\chi_q^4 - \pi^4 \pm \sqrt{\phi(\chi_q)} \right], \quad (21)$$

где $\phi(\chi_q) = (\pi^4 - 16\chi_q^4)^2 - 160\chi_q^2[(3\pi^2 + 4\chi_q^2)^2 \chi_q^2 + \pi^6]$,

$$V_{2(2)}m = \frac{12\pi \operatorname{sh} 2\chi_q \operatorname{ch} \chi_q}{\phi_2(\chi_q)} \left[-\phi_1(\chi_q) \pm \sqrt{\phi_1(\chi_q)^2 - 640\chi_q^2 \phi_2(\chi_q)} \right].$$

Здесь $\phi_1(\chi_q) = 512\chi_q (\pi^4 - \chi_q^4) \operatorname{ch} \chi_q - 75\pi^5 \operatorname{sh} 2\chi_q + 120\pi\chi_q^2(\pi^2 - 2\chi_q^2) \operatorname{sh} 2\chi_q$,

$$\phi_2(\chi_q) = 45\pi^4[(3\pi^2 - 4\chi_q^2)^2 - 4\pi^4] \operatorname{sh}^2 2\chi_q + 96\pi\chi_q[16\chi_q^2(3\pi^2 + \chi_q^2)^2 - \pi^4(41\pi^2 + 105\chi_q^2)] \operatorname{sh} 2\chi_q \operatorname{ch} \chi_q + 4096\chi_q^2[4\pi^6 + \chi_q^2(3\pi^2 + \chi_q^2)^2] \operatorname{ch}^2 \chi_q,$$

$$V_{2(3)}m = \frac{\operatorname{sh} \chi_q}{2\pi\chi_q(\chi_q^2 + \pi^2)} \left[-\pi^2 \pm \sqrt{\pi^4 - 32\chi_q^2(\pi^2 + \chi_q^2)} \right],$$

$$V_{2(4)}m = \frac{3\pi \operatorname{sh} \chi_q}{\chi_q[(3\pi^2 + \chi_q^2)^2 \chi_q^2 + 4\pi^6]} \left[\chi_q^4 - \pi^4 \pm \sqrt{\phi(\chi_q)} \right],$$

где $\phi(\chi_q) = (\pi^4 - \chi_q^4)^2 - 10\chi_q^2[(3\pi^2 + \chi_q^2)^2 \chi_q^2 + 4\pi^6]$.

На рис. 3, а изображены графики этих функций. На них видно, что полное прохождение возможно для ограниченного интервала значений χ_q . При этом каждому χ_q из этого интервала соответствует два значения параметра $V_{2(j)} < 0$.

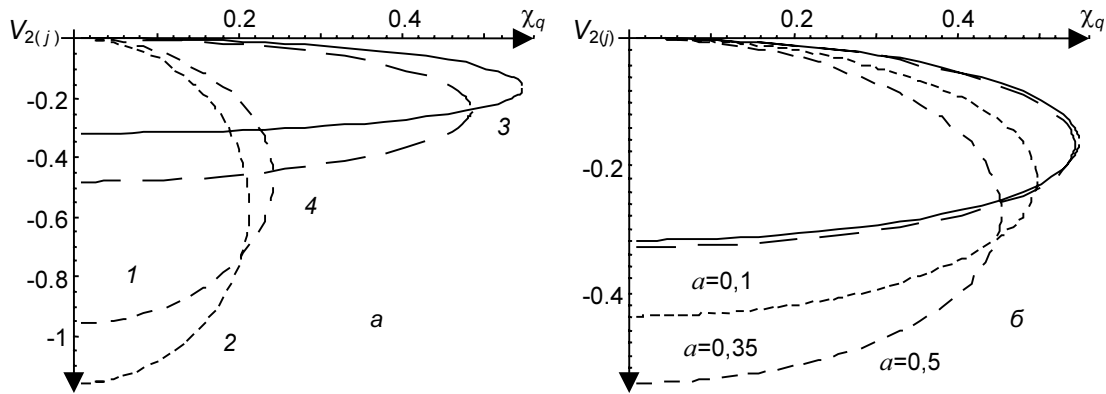


Рис. 3. Условие полного прохождения для потенциалов: а – «вторая производная дельта-функции»; б – «суперпозиция трёх дельта-функций» при некоторых значениях a и «вторая производная дельта-функции» – сплошная линия для $j = 3$

Условия полного прохождения для потенциала «вторая производная дельта-функции» аналогичны условиям полного прохождения для потенциала «суперпозиция трёх дельта-функций»:

$$V(\rho) = \frac{V_2}{a^2} [\delta(\rho + a) - 2\delta(\rho) + \delta(\rho - a)] \quad (22)$$

при малых значениях вещественного параметра a . Эта аналогия проиллюстрирована на рис. 3.

Для потенциалов «первая и третья производная дельта-функции» условия, аналогичные (21), не выполняются (при $V_n \neq 0$), т.е. полное прохождение невозможно.

Рассмотрим теперь условия обращения коэффициента отражения в единицу. Нетрудно показать, что равенство $R_j = 1$ даёт алгебраическое уравнение $n+1$ -й степени относительно безразмерного параметра $(m^{n-1}V_n)$

$$a_{n+1}^{(n,j)}(m^{n-1}V_n)^{n+1} + a_n^{(n,j)}(m^{n-1}V_n)^n + \dots + a_1^{(n,j)}(m^{n-1}V_n) + a_0^{(n,j)} = 0, \quad (23)$$

где коэффициенты $a_0^{(n,j)}, \dots, a_{n+1}^{(n,j)}$ зависят от выбора потенциала и ФГ. Вещественные решения этого уравнения как функции быстроты и будут условиями полного отражения. Для случая потенциала «производная дельта-функции» эти условия принимают следующий вид:

$$V_{1(1)}^2 = \frac{3\pi^2 \operatorname{sh}^2 2\chi_q}{\chi_q^2 [4\pi^2 + \chi_q^2]}, \quad V_{1(3)}^2 = \frac{4\operatorname{sh}^2 \chi_q}{\chi_q^2}, \quad V_{1(4)}^2 = \frac{12\pi^2 \operatorname{sh}^2 \chi_q}{\chi_q^2 [\pi^2 + \chi_q^2]},$$

$$V_{1(2)}^2 = \frac{48\pi^2 \operatorname{sh}^2 2\chi_q}{16\chi_q^2 (\pi^2 + \chi_q^2) + 3\pi^4 \operatorname{sh}^2 2\chi_q + 2\pi\chi_q (4\chi_q^2 - 5\pi^2) \operatorname{sh} \chi_q}. \quad (24)$$

На рис. 4 изображены графики этих функций. Как видно на графиках и из аналитических выражений (24), обращение коэффициента отражения в единицу возможно при двух отличающихся знаком значениях V_1 для каждого значения χ_q . Это объясняется тем, что параметр V_1 входит в выражения для коэффициентов отражения (14) в чётной степени.

Условия, аналогичные (24), выполняются и для потенциалов «вторая и третья производная дельта-функции», однако ввиду их громоздкости мы приведём здесь лишь формулы для случая $j = 3$:

$$mV_{2(3)} = \frac{\pm 2 \operatorname{sh} \chi_q}{\chi_q \sqrt{3\pi^2 + 4\chi_q^2}}; \quad (25)$$

$$(m^2 V_{3(3)})^2 = \frac{(3\pi^2 + 4\chi_q^2 \pm \sqrt{21\pi^4 + 36\pi^2 \chi_q^2 + 16\chi_q^4})^2 \operatorname{sh}^2 \chi_q}{9\pi^4 \chi_q^2 (\pi^2 + \chi_q^2)^2}.$$

Рис. 4. Условие полного отражения для потенциала «производная дельта-функции»

На рис. 5 и 6 приведены графики всех функций.

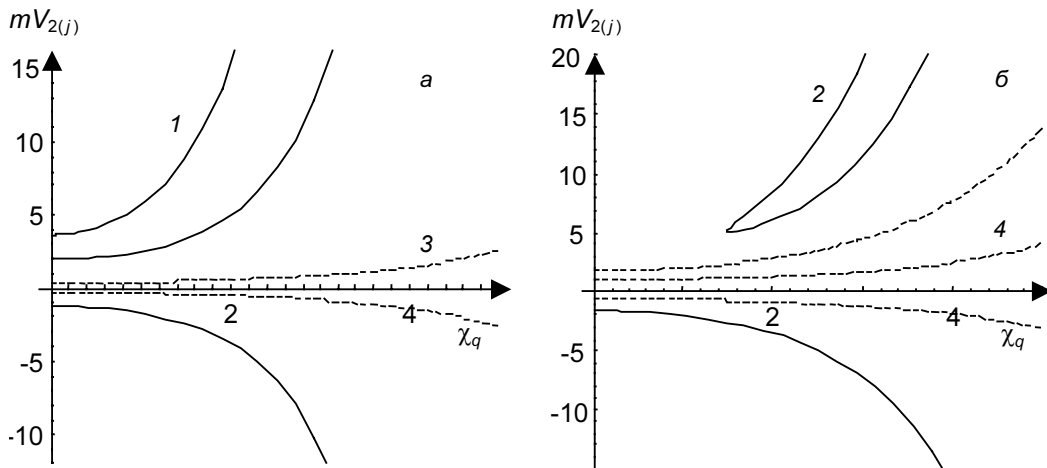


Рис. 5. Условия полного отражения для потенциала «вторая производная дельта-функции»: $j = 1, 2$ – сплошная линия; $j = 3, 4$ – пунктирная линия

На рисунках и из выражений (24), (25) видно, что полное отражение для фиксированного значения χ_q наблюдается при $n+1$ значениях V_n , исключение составляет вариант для $n = 2, j = 3$,

когда $R_j = 1$ при двух значениях V_2 для каждого значения χ_q . Это объясняется тем, что в уравнении (23), которое в данном случае является кубическим, коэффициент при третьей степени $a_3^{(2,3)}$ равен нулю, и, таким образом, кубическое уравнение обращается в квадратное, имеющее два ве-

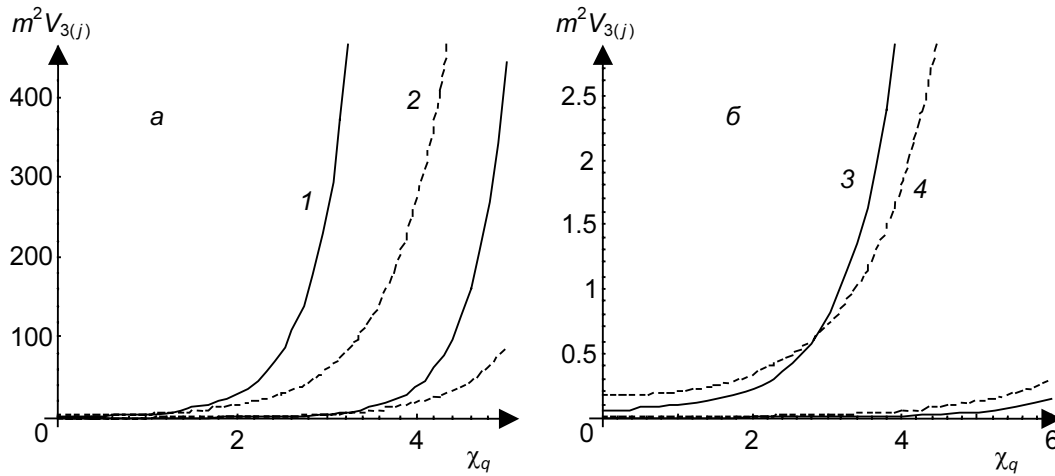


Рис. 6. Условия полного отражения для потенциала «третья производная дельта-функции»: $j = 1, 3$ – сплошная линия; $j = 2, 4$ – пунктирная линия

щественных, противоположных по знаку корня mV_2 . Обращение коэффициента $a_3^{(2,3)}$ в ноль обусловлено следующим свойством функции Грина $g_3(\rho)$ в точке $\rho = 0$:

$$\left(2\operatorname{sh}\chi_q\right)^2\left(\left(\operatorname{Re}g_3^{(2)}\right)^3-\operatorname{Re}g_3\operatorname{Re}g_3^{(2)}\operatorname{Re}g_3^{(4)}\right)+\chi_q^2\operatorname{Re}g_3^{(4)}+2m^2\chi_q^4\operatorname{Re}g_3^{(2)}+m^4\chi_q^6\operatorname{Re}g_3=0. \quad (26)$$

Явление полного отражения от потенциала (5) аналогично полному отражению от потенциала $\delta(\rho)$, обнаруженному в [7] и не имеющему нерелятивистского аналога.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Logunov A.A. and Tavkhelidze A.N. // *Nuovo Cimento*. – 1963. – V. 29. – No. 2. – P. 380–399.
2. Kadyshevsky V.G. // *Nucl. Phys.* – 1968. – V. B6. – No. 1. – P. 125–148.
3. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б. // *ЭЧАЯ*. – 1972. – Т. 2. – No. 3. – С. 635–690.
4. Капшай В.Н., Алфёрова Т.А. // *Ковариантные методы в теоретической физике: Сб. статей / Ин-т физики НАН Беларуси*. – Минск, 1997. – Вып. 4. – С. 88–95.
5. Alferova T.A. and Kapshai V.N. // *Nonlinear phenomena in complex systems: Proc. of the Sixth Annual Seminar NPC'S'97 / Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys.* – Minsk, 1998. – P. 78–85.
6. Капшай В.Н., Алфёрова Т.А. // *Изв. вузов. Физика*. – 1997. – № 7. – С. 53–61.
7. Kapshai V.N. and Alferova T.A. // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1999. – V. 32. – P. 5329–5342.
8. Капшай В.Н., Алфёрова Т.А. // *Изв. вузов. Физика*. – 2002. – № 1. – С. 3–10.
9. Альберверо С., Гестези Ф., Хёгг-Крон Р., Хольден Х. *Решаемые модели в квантовой механике*. – М.: Мир, 1991. – 568 с.
10. Albeverio S. and Kurasov P. *Singular Perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators*. – New York: Springer, 1999. – 460 p.

Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины,
г. Гомель, Республика Беларусь
E-mail: kapshai@tut.by

Поступила в редакцию 17.07.08.