

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, И. С. АРШОН

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ $\{x^{\lambda_n}\}$ НА КРИВОЙ

В настоящей заметке чрезвычайно простыми средствами будет получено обобщение известной теоремы Мюнца о полноте системы $\{x^{\lambda_n}\}$ с отрезка действительной оси на произвольный спрямляемый контур комплексной плоскости*.

Пусть Γ — контур в комплексной плоскости x , $\mu(x)$ — лебегова мера на Γ и $\int_{\Gamma} d\mu(x) = \text{const} > 0$.

Обозначим через $L_p(\Gamma; \mu)$, $p > 1$, линейное нормированное пространство комплекснозначных функций $h(x)$, заданных на Γ , с нормой

$$\|h\|_{L_p(\Gamma; \mu)} = \left(\int_{\Gamma} d\mu(x) \right)^{-1} \left(\int_{\Gamma} |h(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Теорема. Пусть контур Γ целиком лежит в угле $|\arg x| \leq \pi\sigma$, $0 \leq \sigma \leq 1$, а последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{+\infty} \frac{n(u) - \pi u}{u^2} du = +\infty,$$

где $n(u)$ — число точек λ_n в интервале $(0, u)$.

Тогда система функций $\{x^{\lambda_n} = |x|^{\lambda_n} \exp(i\lambda_n \arg x)\}$ полна в пространстве $L_p(\Gamma, \mu)$, $p > 1$.

Доказательство. Каждый линейный непрерывный функционал $\Phi[h]$ в пространстве $L_p(\Gamma; \mu)$ имеет вид

$$\Phi[h] = \Phi_g[h] = \int_{\Gamma} h(x) g(x) d\mu(x),$$

где $g(x) \in L_q(\Gamma; \mu)$, $1/p + 1/q = 1$. Согласно известной теореме Банаха, для доказательства нашего утверждения достаточно установить, что любой линейный непрерывный функционал в $L_p(\Gamma; \mu)$, обращающийся в нуль на системе $\{x^{\lambda_n}\}$, является тождественным нулем. Зафиксируем $g(x) \in L_q(\Gamma; \mu)$ и обозначим при $\text{Re } z \geq 0$

$$\varphi(z) = \int_{\Gamma} x^z g(x) d\mu(x).$$

Имеем

$$\varphi(\lambda_n) = \int_{\Gamma} x^{\lambda_n} g(x) d\mu(x) = \Phi_g[x^{\lambda_n}] = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Требуется показать, что $g(x) = 0$ почти всюду по мере $\mu(x)$, а для этого достаточно установить, что $\varphi(z) \equiv 0$.

* Теорема Мюнца о полноте системы $\{x^{\lambda_n}\}$ в пространстве $C(0,1)$ не является следствием теоремы Г. Карлемана о полноте системы функции $\{z^{\lambda_n}\}$ в некотором угле (см. (1), стр. 386).

В самом деле, из того, что $\varphi(z) \equiv 0$, следует

$$\varphi(n) = \int_{\Gamma} x^n g(x) d\mu(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда и из того, что система положительных степеней $\{x^n\}$ полна в пространстве $L_p(\Gamma; \mu)$, вытекает, что $g(x) = 0$ почти всюду на Γ по мере $\mu(x)$.

Легко видеть, что $\varphi(z)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$. Далее, согласно неравенству Гёльдера,

$$|\varphi(z)| \leq \left\{ \int_{\Gamma} |x^z|^p d\mu(x) \right\}^{1/p} \left\{ \int_{\Gamma} |g(x)|^q d\mu(x) \right\}^{1/q},$$

откуда, ввиду условия $g(x) \in L_q(\Gamma; \mu)$, имеем

$$\ln |\varphi(z)| \leq \frac{1}{p} \ln \int_{\Gamma} |x^z|^p d\mu(x) + C,$$

где $C = C_g$ зависит только от функции $g(x)$ и не зависит от z .

Далее,

$$\frac{1}{p} \ln \int_{\Gamma} |x^z|^p d\mu(x) \leq \frac{1}{p} \ln \left\{ \max_{x \in \Gamma} |x^z|^p \int_{\Gamma} d\mu(x) \right\} = \ln \max_{x \in \Gamma} |x^z| + C_1,$$

причем C_1 не зависит от z . В силу условия $\max_{x \in \Gamma} |\arg x| \leq \pi\sigma$, получаем

$$\begin{aligned} \ln |\varphi(z)| &\leq \max_{x \in \Gamma} \{(\operatorname{Re} z) \ln |x| - (\operatorname{Im} z) \arg x\} + C_2 \leq \\ &\leq C_2 + M \operatorname{Re} z + \pi\sigma |\operatorname{Im} z|, \quad C_2 = C + C_1, \quad M = \max_{x \in \Gamma} \{|\ln |x||\}. \end{aligned}$$

Отобразим полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ в единичный круг $|w| < 1$ с помощью функции $w = \frac{z-1}{z+1}$, $z = \frac{1+w}{1-w}$. Тогда функция $f(w) = \varphi\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$ будет регулярна в круге $|w| < 1$, причем точки $\mu_n = (\lambda_n - 1) / (\lambda_n + 1)$, $n = 1, 2, \dots$, станут нулями функции $f(w)$.

Обозначим через $\nu(\rho)$ число точек μ_n в круге $|w| < \rho$. Пусть, далее

$$N(\rho) = \sum_{|\mu_n| < \rho} \ln \frac{\rho}{|\mu_n|}, \quad S(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\theta})| d\theta, \quad 0 < \rho < 1.$$

Если число неположительных точек μ_n бесконечно, т. е. бесконечно число точек λ_n на отрезке $0 \leq \lambda_n \leq 1$, то по теореме единственности для аналитических функций $\varphi(z) \equiv 0$ и наше утверждение доказано. Исключив этот тривиальный случай, будем иметь

$$N(\rho) = \sum_{\delta < \mu_n < \rho} \ln \frac{\rho}{\mu_n} + O(1), \quad \rho \rightarrow 1-0, \quad \delta > 0,$$

или, что то же самое,

$$N(\rho) = \int_{\delta}^{\rho} \ln \frac{\rho}{t} d\nu(t) + O(1) = \int_{\delta}^{\rho} \frac{\nu(t)}{t} dt + O(1), \quad \rho \rightarrow 1-0.$$

Теперь заметим, что, ввиду положительности всех чисел λ_n , равносильны следующие неравенства:

$$\mu_n = \frac{\lambda_n - 1}{\lambda_n + 1} < \rho, \quad \lambda_n < \frac{1 + \rho}{1 - \rho}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Отсюда вытекает, что $v(\rho) = n \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \right)$. Значит,

$$N(\rho) = \int_{\delta}^{\rho} n \left(\frac{1+t}{1-t} \right) \frac{dt}{t} + O(1), \quad \rho \rightarrow 1-0,$$

или, что то же самое,

$$N(\rho) = 2 \int_{1+\Delta}^{(1+\rho)/(1-\rho)} \frac{n(u) du}{u^2-1} + O(1), \quad \rho \rightarrow 1-0, \Delta > 0. \quad (1)$$

Теперь, пользуясь полученным выше неравенством для $\ln |\varphi(z)|$, займемся оценкой сверху величины $S(\rho)$. Имеем

$$\begin{aligned} S(\rho) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ C_2 + M \operatorname{Re} \frac{1+\rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{i\theta}} + \pi \zeta \left| \operatorname{Im} \frac{1+\rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{i\theta}} \right| \right\} d\theta = \\ &= C_2 + M + \zeta \int_0^{\pi} \frac{2\rho \sin \varphi d\varphi}{1-2\rho \cos \varphi + \rho^2} = C_3 + \zeta \ln(1-2\rho \cos \varphi + \rho^2) \Big|_0^{\pi} = \\ &= C_3 + 2\zeta \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + O(1), \quad \rho \rightarrow 1-0. \end{aligned}$$

Итак,

$$S(\rho) \leq 2\zeta \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + O(1), \quad \rho \rightarrow 1-0.$$

Последнее неравенство представим в виде

$$S(\rho) \leq 2 \int_{1+\Delta}^{(1+\rho)/(1-\rho)} \frac{\zeta u du}{u^2-1} + O(1), \quad \rho \rightarrow 1-0, \quad (2)$$

поскольку

$$\int_{1+\Delta}^{(1+\rho)/(1-\rho)} \frac{2u du}{u^2-1} = 2 \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + O(1), \quad \rho \rightarrow 1-0.$$

Обратимся, наконец, к известной формуле Иенсена, согласно которой функция $f(w)$, регулярная в круге $|w| < 1$ и удовлетворяющая условию

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} [S(\rho) - N(\rho)] = -\infty,$$

является тождественным нулем (см. (1), стр. 53). Согласно оценкам (1) и (2), это условие в нашем случае имеет вид

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} \int_{1+\Delta}^{(1+\rho)/(1-\rho)} \frac{n(u) - \zeta u}{u^2-1} du = +\infty \quad \text{или} \quad \int_1^{\infty} \frac{n(u) - \zeta u}{u^2} du = +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Пусть контур Γ удовлетворяет условиям теоремы, а последовательность $\{\lambda_n\}$ такова, что

$$\text{а) } \lambda_{n+1} - \lambda_n > \text{const} > 0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\text{б) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{\lambda_k \leq t} \frac{1}{\lambda_k} - \zeta \ln t \right\} = +\infty.$$

Тогда система $\{x_n^{\lambda}\}$ полна в пространстве $L_p(\Gamma; \mu)$.

Доказательство. Условие б) можно записать в виде

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t^t \frac{d\{n(u) - \zeta u\}}{u} = +\infty,$$

или после интегрирования по частям

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \int_0^t \frac{n(u) - \tau u}{u^2} du + \frac{n(t)}{t} \right\} = +\infty.$$

Но согласно условию а) имеем $\lambda_n \geq dn$, $d > 0$, $n(u) \leq \frac{1}{d} u$, так что, согласно нашей теореме, получаем требуемое.

Замечание. При $\sigma = 0$ получаем (в несколько ослабленном виде вследствие наличия дополнительного ограничения а)) классическую теорему Мюнца о полноте системы $\{x^{\lambda_n}\}$ в пространстве $C(0, 1)$.

Следствие 2. Пусть положительные числа λ_n удовлетворяют условиям:

а) $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq \text{const} > 0$, $n = 1, 2, \dots$;

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} - \ln \lambda_{n+1} \right\} = +\infty.$$

Тогда система функций $\{e^{i\lambda_n t}\}$ полна в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$.

Для доказательства достаточно положить в предыдущем следствии $\sigma = 1$, взять в качестве контура Γ окружность $|x| = 1$, а в качестве меры $\mu(x)$ — величину $|x|$. Сделав затем замену $x = e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, получим требуемое.

Замечание. Полнота системы $\{e^{i\lambda_n t}\}$ в пространстве $L_p(-\pi, \pi)$, $p \geq 1$, установлена Н. Левинсоном (см. (1), стр. 433) при условии

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} - \pi \lambda_{n+1} + \frac{\ln \lambda_{n+1}}{p} \right\} > -\infty.$$

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
10 XI 1972

Московский институт электронного
машиностроения

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. И. Ибрагимов, Методы интерполяции функций и некоторые их применения, «Наука», 1971, стр. 1.