Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 4

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

И. В. ОСТРОВСКИЙ

ОПИСАНИЕ КЛАССА I_0 В СПЕЦИАЛЬНОЙ ПОЛУГРУППЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

(Представлено академиком Ю. В. Линником 22 V 1972)

1°. Обозначим через $\mathfrak{S}$ совокупность вероятностных мер на полуоси $[0, \infty)$. Введем на $\mathfrak{S}$ бинарную операцию $\circ$, определяя меру $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_1 \in \mathfrak{S}$, $\sigma_2 \in \mathfrak{S}$, как линейный функционал в пространстве ограниченных непрерывных на $[0, \infty)$ функций $f(x)$, действующий по формуле

$$\int_0^\infty f(x)(\sigma_1 \circ \sigma_2)(dx) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \left\{ \int_{-1}^1 f(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\lambda}) \tilde{p}_n(\lambda)\, d\lambda \right\} \sigma_1(dx)\, \sigma_2(dy), \tag{1}$$

где

$$\tilde{p}_n(\lambda) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left\{ \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sqrt{\pi} \right\}^{-1} (1 - \lambda^2)^{(n-3)/2}, \ n > 1, \ -1 < \lambda < 1.$$

Операция $\circ$ зависит от выбора числа $n > 1$, хотя это и не отражено в ее обозначении.

Операция $\circ$ была введена Дж. Кингменом [8] в связи с изучением случайного блуждания со сферической симметрией; позднее она рассматривалась К. Урбаником [9] в качестве одной из реализаций аксиоматически определенной им операции «обобщенной свертки». Очевидно, операция $\circ$ коммутативна; Дж. Кингмен [8] показал, что она ассоциативна и, таким образом, превращает множество $\mathfrak{S}$ в коммутативную полугруппу $(\mathfrak{S}, \circ)$. Мера $\varkappa_0 \in \mathfrak{S}$, сосредоточенная в одной точке $x = 0$, является в этой полугруппе единицей.

При *целом* $n \geqslant 2$ полугруппа $(\mathfrak{S}, \circ)$ допускает простое вероятностное истолкование. Обозначим через $\mathfrak{F}_n$ совокупность вероятностных мер в R^n, инвариантных относительно поворота вокруг начала координат. $\mathfrak{F}_n$ является полугруппой относительно операции обычной свертки. Нетрудно убедиться, что эта полугруппа изоморфна $(\mathfrak{S}, \circ)$; изоморфизм устанавливается сферическим проектированием меры $P \in \mathfrak{F}_n$ на луч $[0, \infty)$:

$$\sigma(E) = P(\{x\colon x \in R^n, \ |x| \in E\}), \quad E \subset [0, \infty). \tag{2}$$

Таким образом, операцию $\circ$ при целом $n \geqslant 2$ можно истолковать как сложение независимых n-мерных случайных векторов, распределенных сферически симметрично.

Недавно Н. Бингхем [4] с помощью теории «дельфийских» полугрупп Д. Кендалла [7], дополненной Р. Давидсоном [6], показал, что на полугруппы К. Урбаника и, в частности на полугруппу $(\mathfrak{S}, \circ)$, переносятся теоремы о факторизации, установленные А. Я. Хинчиным ([3], стр. 96, 98), для полугруппы вероятностных мер на прямой с операцией обычной свертки. В связи с этим возникает вопрос об описании класса $I_0(\mathfrak{S}, \circ)$, состоящего из мер $\sigma \in \mathfrak{S}$, не имеющих простых делителей в полугруппе $(\mathfrak{S}, \circ)$. Этот вопрос аналогичен известной [3] не решенной до сих пор проблеме описания класса I_0. Однако класс $I_0(\mathfrak{S}, \circ)$ удается описать довольно просто; этому и посвящена настоящая работа.

Теорема. *Класс $I_0(\mathfrak{S}, \circ)$ состоит из распределений Рэлея*

$$\rho_a(E) = \frac{2a^n}{\Gamma(n/2)} \int\limits_E x^{n-1} \exp(-a^2x^2)\,dx, \quad 0 < a \leqslant \infty; \quad \rho_\infty = \varkappa_0.$$

Распределения Рэлея при целом n связаны с n-мерными сферически симметричными законами Гаусса формулой (2).

Следствие. *В полугруппе $\mathfrak{F}_n$, $n \geqslant 2$, с операцией обычной свертки законы Гаусса и только они не имеют простых делителей.*

Здесь, конечно, представляет интерес только второе утверждение, первое содержится в теореме Крамера ([2], стр. 136).

2°. Характеристической функцией (х.ф.) меры $\sigma \in \mathfrak{S}$ будем называть функцию

$$\Phi(t; \sigma) = \int\limits_0^\infty \Omega_n(tx)\sigma(dx), \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{3}$$

где

$$\Omega_n(z) = \Gamma(n/2)\,(2/z)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(z),$$

а J_α — функция Бесселя порядка α.

Как показал Дж. Кингмен ([8]), из $\Phi(t; \sigma_1) = \Phi(t; \sigma_2)$ следует $\sigma_1 = \sigma_2$, а равенство $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ равносильно равенству $\Phi(t; \sigma) = \Phi(t; \sigma_1)\Phi(t; \sigma_2)$. Меру $\sigma \in \mathfrak{S}$ будем называть безгранично делимой (б.д.), если для любого $m = 2, 3, \ldots$ она представляется в виде $\sigma = \sigma_m{}^{m\circ} = \sigma_m \circ \ldots \circ \sigma_m$ (m раз), где $\sigma_m \in \mathfrak{S}$. Дж. Кингмен ([8]) установил, что общий вид х.ф.б.д. меры $\sigma \in \mathfrak{S}$ дается формулой

$$\Phi(t; \sigma) = \exp\left\{\int\limits_0^\infty (\Omega_n(tx) - 1)\frac{1 + x^2}{x^2} G_\sigma(dx)\right\}, \tag{4}$$

где G_σ — вполне конечная мера на $[0, \infty)$. Мера G_σ в представлении (4) единственна; отсюда следует (ср. ([3]), стр. 104), что если х.ф. некоторой меры $\sigma \in \mathfrak{S}$ представляется в форме (4), где G_σ — заряд, принимающий и отрицательные значения, то σ не является б.д. мерой. Распределения Рэлея являются б.д., для них мера G_σ сосредоточена в точке $x = 0$.

3°. Чтобы доказать нашу теорему, нужно сначала установить, что $\rho_a \in I_0(\mathfrak{S}, \circ)$. Пусть $\rho_a = \sigma_1 \circ \sigma_2$, где $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}$. Тогда $\Phi(t; \rho_a) = \Phi(t; \sigma_1) \cdot \Phi(t; \sigma_2)$. Поскольку $\Phi(t; \rho_a) = \exp(-t^2/(4a^2))$, а функция $\Phi(t; \sigma_j)$ являются, как легко проверить, в обычном смысле характеристическими для некоторых вероятностных мер на прямой, то, пользуясь теоремой Крамера (([2]), стр. 136), заключаем, что $\Phi(t; \sigma_j) = \exp(-t^2/(4a^2))$, $0 < a_j \leqslant \infty$, $j = 1,2$.

4°. В основе доказательства того, что класс $I_0(\mathfrak{S}, \circ)$ исчерпывается мерами ρ_a, лежат идеи работы Крамера ([5]). Прежде чем излагать его, заметим, что для зарядов так же, как для мер, можно равенством (1) определить операцию $\circ$, а равенством (3) ввести х.ф. При этом будет иметь место однозначность соответствия между зарядами и х.ф., а также соотношение $\Phi(t; \sigma_1 \circ \sigma_2) = \Phi(t; \sigma_1)\Phi(t; \sigma_2)$.

Пусть $\sigma \in I_0(\mathfrak{S}, \circ)$, тогда, по теореме Н. Бингхема ([4]), мера σ является б.д. и, следовательно, ее х.ф. представима в виде (4). Предположим, что σ не является распределением Рэлея, тогда соответствующая мера G_σ не сосредоточена в точке $x = 0$. Не уменьшая общности (ср. ([5])), можно считать, что х.ф. $\Phi(t; \sigma)$ имеет вид

$$\Phi(t; \sigma) = \exp\left\{\int\limits_0^\infty (\Omega_n(tx) - 1)\,H(dx)\right\},$$

где $H \neq 0$ — вполне конечная мера, носитель которой содержится в отрезке $[1, 1+\eta]$, $\eta = {}^1/_{10}$. Покажем, что мера σ имеет в полугруппе $(\mathfrak{S}, \circ)$ делитель, не являющийся б.д. мерой; тогда в силу теоремы Н. Бингхема ([4]), σ имеет и простой делитель.

Обозначим через χ сужение лебеговой меры на отрезок $[a, b]$, $a = {}^1/_5$, $b = {}^3/_{10}$, и рассмотрим функцию

$$\Phi_\varepsilon(t) = \exp\left\{\int_0^\infty (\Omega_n(tx) - 1)(H - \varepsilon\chi)(dx)\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Легко видеть, что $\Phi_\varepsilon(t) = \Phi(t; \sigma_\varepsilon)$, где σ_ε — заряд, определяемый равенством

$$\sigma_\varepsilon = e^{-c}\left\{\varkappa_0 + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k!}(H - \varepsilon\chi)^{k\circ}\right\}, \quad c = (H - \varepsilon\chi)([0, \infty)). \tag{5}$$

Достаточно показать (ср. ([5])), что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ заряд σ_ε является мерой. Для этого понадобится следующая лемма.

5°. Лемма. *При достаточно малом $\varepsilon > 0$ заряды*

$$-\varepsilon\chi + {}^1/_2(H - \varepsilon\chi)^{2\circ}, \quad (H - \varepsilon\chi)^{3\circ} \tag{6}$$

являются мерами.

Доказательство. В силу формулы Гегенбауэра (([1]), стр. 52), при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ справедливо отношение

$$\Omega_n(tx_1)\,\Omega_n(tx_2) = \int_0^\infty \Omega_n(tx_3)\,K(x_1, x_2, x_3)\,x_3^{n-1}dx_3, \tag{7}$$

где K — функция, которая в области $Q = \{2\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3} x_j < x_1 + x_2 + x_3, \min\limits_{1\leqslant j\leqslant 3} x_j > 0\}$ дается равенством

$$K(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^{n-3}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{\{[x_3^2 - (x_1 - x_2)^2]\,[(x_1 + x_2)^2 - x_3^2]\}^{(n-3)/2}}{(x_1x_2x_3)^{n-2}},$$

а вне указанной области равна нулю. Нетрудно убедиться, что K — неотрицательная симметрическая функция от x_1, x_2, x_3 и в области $\{1 < x_1 < 1+\eta$, $1 < x_2 < 1+\eta$, $2\eta < x_3 < 2-2\eta\}$ ограничена снизу некоторой положительной постоянной B_1. Полагая в (7) $t = 0$, получаем равенство

$$\int_0^\infty K(x_1, x_2, x_3)\,x_3^{n-1}dx_3 = 1. \tag{8}$$

В силу (7) имеем

$$\Phi(t; H\circ H) = \int_0^\infty\int_0^\infty \Omega_n(tx_1)\,\Omega_n(tx_2)\,H(dx_1)\,H(dx_2) =$$

$$= \int_0^\infty \Omega_n(tx_3)\left\{\int_0^\infty\int_0^\infty K(x_1, x_2, x_3)\,H(dx_1)\,H(dx_2)\right\}x_3^{n-1}dx_3.$$

Отсюда видно, что мера $H \circ H$ имеет плотность

$$p_1(x) = x^{n-1}\int_0^\infty\int_0^\infty K(x_1, x_2, x)\,H(dx_1)\,H(dx_2).$$

Поскольку $H([1, 1+\eta]) > 0$, имеем $p_1(x) \geqslant (2\eta)^{n-1}B_1\{H([1, 1+\eta])\}^2 = B_2$ при $2\eta \leqslant x \leqslant 2-2\eta$ $(B_2 = \text{const} > 0)$.

Аналогичным образом показываем, что мера $H \circ \chi$ имеет плотность

$$p_2(x) = x^{n-1} \int_0^\infty \int_0^\infty K(x_1, x_2, x) H(dx_1) \chi(dx_2).$$

Так как $K = 0$ вне области Q, то $p_2(x) = 0$ при $x \notin [1-b, 1+b+\eta]$. Учитывая симметрию ядра K и соотношение (8), заключаем, что $p_2(x) \leqslant B_3 < \infty$ при $x \in [1-b, 1+b+\eta]$ $(B_3 = \mathrm{const} < \infty)$.

Обозначая через $p_3(x)$ функцию, равную нулю вне отрезка $[a, b]$ и равную единице на нем, имеем $(H \circ H - 2\varepsilon H \circ \chi - 2\varepsilon\chi)(dx) = (p_1(x) - 2\varepsilon p_2(x) - 2\varepsilon p_3(x))dx$. Будем считать, что $0 < \varepsilon < B_2 \ (2B_3 + 2)^{-1}$. Так как отрезок $[2\eta, 2 - 2\eta]$ покрывает отрезки $[a, b]$ и $[1-b, 1+b+\eta]$, то при всех $x \geqslant 0$ выполняется $p_1(x) - 2\varepsilon p_2(x) - 2\varepsilon p_3(x) \geqslant 0$. Отсюда легко следует, что первый из зарядов (6) является мерой.

Чтобы рассмотреть второй из зарядов (6), пользуемся вытекающим из (7) соотношением $(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0)$

$$\Omega_n(tx_1)\,\Omega_n(tx_2)\,\Omega_n(tx_3) = \int_0^\infty \Omega_n(tx_4)\,L(x_1, x_2, x_3, x_4)\,x_4^{n-1}dx_4,$$

где функция L симметрическая от x_1, x_2, x_3, x_4 и равна нулю вне области $R = \{2 \max\limits_{\leqslant j \leqslant 4} x_j < x_1 + x_2 + x_3 + x_4\}$. Кроме того, в области $\{1 < x_1 < 1 + \eta$, $1 < x_2 < 1 + \eta$, $1 < x_3 < 1 + \eta$, $0 < x_4 < 3 - 3\eta\}$ она ограничена снизу некоторой положительной постоянной.

6°. Завершим доказательство теоремы. Рассмотрим заряды $(H - \varepsilon\chi^{k\circ})$, $k = 2, 3, \ldots$ В силу леммы можно выбрать $\varepsilon > 0$ таким, чтобы при $k = 2$ и 3 эти заряды были мерами. Так как любое $k > 3$ можно представить в виде $k = 2p + 3q$, где p и q целые неотрицательные, то эти заряды будут мерами и при $k > 3$. Используя (5), заключаем, что и заряд σ_ε будет мерой при достаточно малом $\varepsilon > 0$, что и требовалось доказать.

7°. Замечание. Дж. Кингмен в работе ([8]), стр. 34, поставил вопрос, справедлива ли для полугруппы $(\mathfrak{S}, \circ)$ теорема, аналогичная известной теореме Д. А. Райкова ([3]), стр. 119, о разложениях закона Пуассона, если считать аналогом закона Пуассона для $(\mathfrak{S}, \circ)$ меру π_a с х.ф. вида

$$\Phi(t; \pi_a) = \exp\{a(\Omega_n(t) - 1)\}, \quad a > 0.$$

Другими словами, имеет ли мера π_a делители, кроме делителей вида π_b с $0 \leqslant b \leqslant a$? Из доказанной нами теоремы следует, что мера π_a имеет простые делители. Эти делители не могут совпадать с π_b, поскольку π_b — б.д. мера. Таким образом, аналог теоремы Д. А. Райкова для полугруппы $(\mathfrak{S}, \circ)$ не имеет места.

Автор выражает признательность В. С. Азарину за внимание к работе.

С чувством глубокой благодарности автор отмечает помощь Ю. В. Линника, оказанную при выборе темы.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
17 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, 2, М., 1970. [2] Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, М., 1947. [3] Ю. В. Линник, Разложения вероятностных законов, Л., 1960. [4] N. H. Bingham, Proc. London Math. Soc., 23, 16 (1971). [5] H. Cramér, Arkiv f. mat., 1, 61 (1949). [6] R. Davidson, Zs. Wahrscheinlichkeitstheor. u. verv. Geb., 10, 120 (1968). [7] D. G. Kendall, ibid., 9, 163 (1968). [8] J. F. C. Kingman, Acta math., 109, 11 (1963). [9] K. Urbanik, Studia math., 23, 217 (1964).