

Б. А. ПАСЫНКОВ

О РАЗМЕРНОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 4 VII 1972)

Все рассматриваемые пространства считаются хаусдорфовыми, все отображения — непрерывными, для вполне регулярного X считаем $\dim X = \dim \beta X$.

1. Справедлива следующая

Теорема 1*. Если произведение $X \times Y$ совершенного паракомпакта ** X на слабо паракомпактное пространство Y нормально и счетно паракомпактно, то имеет место неравенство

$$\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y. \quad (1)$$

Из сформулированной теоремы вытекает отвечающее на вопрос Дж. Нагата ^(1, 2)

Следствие 1. Для произведения $X = \prod_{i=1}^k X_i$ совершенных (например, полных по Чеху) паракомпактов X_i справедливо неравенство

$$\dim X \leq \sum_{i=1}^k \dim X_i. \quad (2)$$

Из следствия 1 вытекает

Следствие 2. Если для вполне регулярных M -пространств X и Y имеет место равенство $\mu(X \times Y) = \mu X \times \mu Y$ (см. ⁽³⁾), то неравенство (1) выполнено.

Из теоремы 1 вытекает также результат К. Морита ⁽⁴⁾ о выполнении неравенства (1) для произведения локально бикompактного паракомпакта на паракомпакт.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующее обобщение известного ранее результата об n -мерности предела обратного спектра из n -мерных бикompактов ^(5, 6).

Теорема 2. Пусть дан обратный спектр $S = \{X_\alpha, \tilde{\vartheta}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, с совершенными проекциями $\tilde{\vartheta}_\alpha^\beta$. Если его элементы X_α являются слабо паракомпактными нормальными пространствами размерности $\dim X_\alpha \leq n$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, а предел X спектра S нормален, то (он слабо паракомпактен и) $\dim X \leq n$.

Следствие 3. Если все проекции $\tilde{\vartheta}_\alpha^\beta$ спектра $S = \{X_\alpha, \tilde{\vartheta}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, совершенны, а все его элементы X_α паракомпактны, то предел X спектра S является паракомпактом размерности

$$\dim X \leq \sup_\alpha \dim X_\alpha.$$

* Близкий результат одновременно получен В. В. Филипповым ⁽¹¹⁾.

** Совершенный паракомпакт — это паракомпакт, обладающий совершенным отображением на метрическое пространство. Таким образом, совершенный паракомпакт — это то же самое, что паракомпактное M - (или p -) пространство.

В доказательстве теоремы 2 используются следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть дан обратный спектр $S = \{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, из слабо паракомпактных пространств X_α с совершенными проекциями $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$; тогда для любого открытого покрытия ω предела X спектра S существует такое множество $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ и такие открытые в X_α множества O_α , $\alpha \in \mathfrak{A}'$, что система $\nu = \{V_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha^{-1} O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}'$, образует точечно конечное и вписанное в ω покрытие предела X .

Если еще все пространства X_α паракомпактны, то можно считать покрытие ν локально конечным и, кроме того, можно утверждать существование таких замкнутых в X_α множеств $\Phi_\alpha \subseteq O_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}'$, что система $\lambda = \{F_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha^{-1} \Phi_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}'$, образует покрытие предела X .

Лемма 2. Пусть дан обратный спектр $S = \{X_\alpha, \tilde{\omega}_\alpha^\beta\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, с совершенными проекциями $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$. Пусть еще выполнено условие:

а) существует такое множество $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ и такие открытые в X_α множества O_α , $\alpha \in \mathfrak{A}'$, что система $\nu = \{V_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha^{-1} O_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}'$, образует точечно конечное покрытие предела X спектра S .

Тогда существует такое хаусдорфово пространство Y , такое совершенное отображение $f: X \rightarrow Y$ и такое открытое точечно конечное покрытие $\eta = \{U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}'$, пространства Y , что

$$f^{-1}U_\alpha = V_\alpha, \quad \alpha \in \mathfrak{A}'; \quad (3)$$

для каждого конечного набора $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ различных индексов из $\mathfrak{A}'$ можно так определить индекс $\alpha = \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, что

$$\alpha(\alpha_1) = \alpha_1, \quad \alpha_1 \in \mathfrak{A}', \quad \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \geq \alpha(\alpha'_1, \dots, \alpha'_r), \quad (4)$$

если $\{\alpha'_j\} \subseteq \{\alpha_i\}$, $j = 1, \dots, r$, $i = 1, \dots, s$.

Для каждого $\alpha = \alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ определено такое совершенное отображение

$$g_{\alpha_1 \dots \alpha_s}: (U_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \bigcap_{i=1}^s U_{\alpha_i}) \rightarrow (O_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \bigcap_{i=1}^s (\tilde{\omega}_{\alpha_i}^\alpha)^{-1} O_{\alpha_i}),$$

что на множестве $V_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = \tilde{\omega}_\alpha^{-1} O_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ имеет место соотношение

$$\tilde{\omega}_{\alpha(\alpha_1 \dots \alpha_s)} = g_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \cdot f \quad (5)$$

и на множестве $B_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = U_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \setminus \bigcup_{k>s} U_{\alpha_1' \dots \alpha_k'}$ отображение $g_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ является гомеоморфизмом.

Аналогично теореме 2 (но легче) доказывается

Теорема 3. Если предел X счетного обратного спектра $S = \{X_n, \tilde{\omega}_n^m\}$, $n = 1, 2, \dots$, из нормальных пространств X_n размерности $\dim X_n \leq r$ с совершенными проекциями $\tilde{\omega}_n^m$ является нормальным и счетно паракомпактным, то $\dim X \leq r$.

Помимо теоремы 2, в доказательстве теоремы 1 используется

Предложение 1. Если произведение $X \times Y$ совершенного паракомпакта X на слабо паракомпактное (соответственно паракомпактное) пространство Y нормально и счетно паракомпактно, то произведение $X \times Y$ слабо паракомпактно (соответственно паракомпактно).

В случае метризуемого X и паракомпактного Y предложение 1 установлено К. Морита (*).

2. Произведение $X \times Y$ будем называть F' -произведением, если для любого конечного открытого нормального покрытия ω произведения $X \times Y$ существует такое σ -локально конечное и вписанное в ω покрытие

* Открытое покрытие называется нормальным, если оно функционально сжимаемо до замкнутого покрытия. (В нормальных пространствах все конечные открытые покрытия нормальны.)

$v = \{V_\alpha \times U_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, этого произведения, что для каждого α на X и Y существуют функции f_α и g_α соответственно, отличные от нуля в точках множеств V_α и U_α и только в них.

В случае нормальных X и Y понятие F' -произведения совпадает с понятием F -произведения в смысле Нагата ⁽⁸⁾.

Теорема 4. Для F' -произведения $X \times Y$ вполне регулярных пространств X и Y имеет место неравенство (1).

Предложение 2. Если произведение $X \times Y$ метрического пространства X на пространство Y нормально и счетно паракомпактно, то $X \times Y$ есть F -произведение.

Из теоремы 4 и предложения 2 вытекает результат Кодама ⁽⁹⁾ о выполнении неравенства (1) в условиях предложения 2.

Из теоремы 4 вытекает также следствие 1. Кроме того, имеет место

Теорема 5. Для произведения $X \times Y$ паракомпактного Σ -пространства X (в смысле К. Нагами ⁽¹⁰⁾) и паракомпактного P -пространства Y справедливо неравенство (1). Если в X и Y выполнена теорема суммы для Ind , то

$$\text{Ind } X \times Y \leq \text{Ind } X + \text{Ind } Y. \quad (6)$$

Примечание при корректуре. Пусть отображения $p: X \rightarrow R$ и $q: Y \rightarrow S$ совершенны, пространства R метризуемо, пространство Y нормально и произведение $R \times S$ нормально и счетно паракомпактно. Тогда $X \times Y$ есть F' -произведение и имеем неравенство (1). Если p — гомеоморфизм, то нормальность Y несущественна. Если X полно по Чеху, то несущественна счетная паракомпактность $R \times S$.

В условиях предложения 2 выполняется формула (6), если в Y для Ind имеет место теорема суммы.

Московский физико-технический институт
г. Долгопрудный Моск. обл.

Поступило
29 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. Nagata, Proc. Symp. on General Topology, Prague, 1966, p. 259. ² J. Nagata, General Topology and its Appl., 1, № 1, 65 (1967). ³ K. Morita, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, 10, 271 (1970). ⁴ K. Morita, Proc. Japan. Acad., 39, 559 (1963). ⁵ Б. А. Пасынков, ДАН, 121, № 1, 45 (1958). ⁶ S. Mardešić, Ill. J. Math., 4, № 2, 278 (1960). ⁷ K. Morita, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A, 8, 87 (1964). ⁸ J. Nagata, Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., 15, № 7, 439 (1967). ⁹ Y. Kodama, Am. J. Math., 91, № 2, 486 (1969). ¹⁰ K. Nagami, J. Math. Soc. Japan, 21, № 2, 282 (1969). ¹¹ В. В. Филиппов, ДАН, 209, № 4 (1973).