

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

В. М. ПЕТКОВ (БОЛГАРИЯ)

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 7 VII 1972)

Рассмотрим оператор

$$M = D_t + \sum_{v=1}^n A^v(t, x) D_{x_v} + B(t, x), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $D_t = -i \frac{\partial}{\partial t}$, $D_{x_v} = -i \frac{\partial}{\partial x_v}$, A^v , B — $(l \times l)$ -матрицы.

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n+1}$, $G_\tau^+ = G \cap \{t > \tau\}$, $G_\tau^- = G \cap \{t < \tau\}$, $S_\tau = G \cap \{t = \tau\}$. Предположим, что все элементы A^v , B принадлежат $C^\infty(G)$. Обозначим через $\lambda_j(t, x, \xi)$, $j = 1, \dots, l$, характеристические корни матрицы

$$A(t, x, \xi) = \sum_{v=1}^n A^v(t, x) \xi_v, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Известно (см. ^(1, 2)), что если в некоторой точке $(t_0, x_0, \xi_0) \in W = \{(t, x, \xi); (t, x) \in G, |\xi| = 1\}$ имеем $\text{Im } \lambda_j(t_0, x_0, \xi_0) \neq 0$, то задача Коши для оператора M некорректна для любой матрицы $B(t, x)$. Ниже мы будем предполагать, что все корни $\lambda_j(t, x, \xi)$ вещественны для $(t, x, \xi) \in W$ и имеют постоянную кратность. Если в каждой точке $(t_0, x_0, \xi_0) \in W$ матрица $A(t_0, x_0, \xi_0)$ подобна диагональной матрице, то задача Коши для M корректна для любой матрицы $B(t, x)$ ⁽³⁾. В ⁽⁴⁾ было показано, что если это условие не выполнено, то существуют матрицы $B(t, x)$, для которых задача Коши для M некорректна.

В настоящей работе рассматриваются системы, для которых матрица $A(t, x, \xi)$ не подобна диагональной матрице. Приводятся условия на $B(t, x)$, которые являются необходимыми или достаточными для корректности задачи Коши.

Определение 1. Задачу Коши

$$Mu = f \quad \text{в} \quad G_{t_0}^+, \quad u|_{S_{t_0}} = g \quad (2)$$

будем называть корректной в $G_{t_0}^+$, если для любых вектор-функций $f \in C_0^\infty(G \cap G_{t_0}^+)$, $g \in C_0^\infty(S_{t_0})$ существует единственное решение $u = (u_1, \dots, u_l) \in C^1(G \cap \overline{G_{t_0}^+})$ задачи (2), причем для любого $\tau > t_0$, если $g \equiv 0$, $f \equiv 0$ в G_τ^- , то $u \equiv 0$ в G_τ^- .

Определение 2. Задачу Коши для оператора M будем называть слабо корректной в G , если для каждой точки $(t, x) \in G$ существует окрестность $\hat{U}$ и $\hat{T} < \hat{t}$ такие, что задача Коши

$$Mu = f \quad \text{в} \quad \hat{U}_{\hat{T}}^+, \quad u|_{S_{\hat{T}}} = g$$

корректна в $\hat{U}_{\hat{T}}^+$ в смысле определения 1.

Сделаем следующее предположение:

(P) Ранг каждой матрицы

$$A_j(t, x, \xi) = -\lambda_j(t, x, \xi)I + A(t, x, \xi),$$

I — единичная матрица, постоянна в W .

Пусть корни $\lambda_j(t, x, \xi)$ имеют соответственно кратности r_j , $r_1 + r_2 + \dots + r_p = l$, $\text{rank } A_j = l - r_j + s_j$. Обозначим через $\text{Ker } a$ ядро матрицы a , через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в C^l , через a^* — матрицу, комплексно сопряженную матрице a .

Пусть $\varphi_j(t, x, \tau, \xi)$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t} = -\lambda_j(t, x, \varphi_j), \quad t > \tau, \quad \varphi_j|_{t=\tau} = \sum_{k=1}^n x_k \xi_k, \quad |\xi| = 1,$$

$$\Phi_j = \text{grad}_x \varphi_j(t, x, \tau, \xi). \quad (3)$$

Мы рассматриваем только такие задачи Коши (3), для которых $G \cap \{t = \tau\} \neq \emptyset$.

Пусть $(t^0, x^0, \tau^0, \xi^0), (t^0, x^0, \xi^0) \in W$, $|t^0 - t^0| < \delta$ — фиксированная точка. Если $\text{rank } A_j(t^0, x^0, \Phi_j(t^0, x^0, \tau^0, \xi^0)) = l - 1$, $s_j > 0$ и δ — достаточно мало, то в некоторой окрестности точки $(t^0, x^0, \tau^0, \xi^0)$ существуют гладкие вектор-функции $R_j(t, x, \Phi_j) \neq 0$, $L_j(t, x, \Phi_j) \neq 0$, принадлежащие соответственно $\text{Ker } A_j(t, x, \Phi_j)$ и $\text{Ker } A_j^*(t, x, \Phi_j)$. Показывается, что

$$\langle L_j(t, x, \Phi_j), R_j(t, x, \Phi_j) \rangle = 0.$$

Обозначим через $h_j(t, x, \Phi_j)$ вектор-функцию, для которой

$$A_j(t, x, \Phi_j) h_j(t, x, \Phi_j) = R_j(t, x, \Phi_j).$$

Кроме того, если $\langle L_j(t, x, \Phi_j), M(R_j(t, x, \Phi_j)) \rangle = 0$, то обозначим через $H_j(t, x, \Phi_j)$ вектор-функцию, для которой

$$A_j(t, x, \Phi_j) H_j(t, x, \Phi_j) = M(R_j(t, x, \Phi_j)).$$

Гладкие вектор-функции $h_j(t, x, \Phi_j)$, $H_j(t, x, \Phi_j)$ определены в окрестности точки $(t^0, x^0, \tau^0, \xi^0)$ с точностью до слагаемого $\sigma(t, x, \tau, \xi) R_j(t, x, \Phi_j)$, где σ — произвольная гладкая скалярная функция.

Если $\text{rank } A_j(t^0, x^0, \Phi_j(t^0, x^0, \tau^0, \xi^0)) = l - 2$, $s_j > 0$, δ достаточно мало, то обозначим через $R_{k,j}(t, x, \Phi_j)$, $L_{k,j}(t, x, \Phi_j)$, $k = 1, 2$, гладкие вектор-функции, которые определены в окрестности точки $(t^0, x^0, \tau^0, \xi^0)$ и образуют базисы соответственно в $\text{Ker } A_j(t, x, \Phi_j)$ и $\text{Ker } A_j^*(t, x, \Phi_j)$. Показывается, что можно так обозначить $R_{k,j}$, $L_{k,j}$, $k = 1, 2$, чтобы выполнялось равенство

$$\begin{pmatrix} \langle L_{1,j}, R_{1,j} \rangle & \langle L_{1,j}, R_{2,j} \rangle \\ \langle L_{2,j}, R_{1,j} \rangle & \langle L_{2,j}, R_{2,j} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \quad Q \neq 0.$$

Ниже мы будем писать R_j , L_j , $R_{k,j}$, $L_{k,j}$, $k = 1, 2$, предполагая, что все эти векторы определены в окрестности одной и той же точки (t, x, τ, ξ) , $(t, x, \xi) \in W$, $|\tau - t|$ достаточно мало.

Теорема 1. Для того чтобы задача Коши для оператора M была слабо корректной в G , необходимо, чтобы для любой φ_j и любой точки (t, x, τ, ξ) выполнялись равенства:

(I) если $r_j = 2$, $s_j = 1$, то

$$\langle L_j, M(R_j) \rangle = 0; \quad (4)$$

(II) если $r_j = 3, s_j = 2$, то выполнено (4) и

$$\langle L_j, M(h_j) + H_j \rangle = 0, \quad (5)$$

$$\langle L_j, M(H_j) \rangle = 0; \quad (6)$$

(III) если $r_j = 3, s_j = 1$, то

$$\langle L_{1,j}, M(R_{1,j}) \rangle = 0, \quad (7)$$

$$\langle L_{1,j}, M(R_{2,j}) \rangle \langle L_{2,j}, M(R_{1,j}) \rangle = 0. \quad (8)$$

З а м е ч а н и е. Показывается, что условия теоремы 1 не зависят от выбора вектор-функций $R_j, L_j, h_j, H_j, R_{h,j}, L_{h,j}, k = 1, 2$.

Для доказательства теоремы 1 строится асимптотическое решение оператора M в виде

$$u_0 = \sum_{k=0}^N v^k(t, x) \rho^{-k/\mu} \exp i \left(\sum_{j=0}^{\mu-1} l^j(t, x) \rho^{(1-j)/\mu} \right),$$

где $\mu = 2, 3$, $v^k(t, x)$ — вектор-функции, $l^j(t, x)$ — скалярные функции, ρ — параметр. Конкретный выбор μ зависит от того, которое из условий (4) — (8) не выполнено.

Условие (4) можно записать и в другой форме ⁽⁵⁾.

С л е д с т в и е. Пусть все корни $\lambda_j(t, x, \xi)$ для $(t, x, \xi) \in W$ имеют постоянную кратность не выше трех. Тогда, если задача Коши для M слабо корректна в G для любой матрицы $B(t, x)$, то в W матрица $A(t, x, \xi)$ имеет только простые элементарные делители.

В этом следствии не предполагается, что постоянен ранг матриц $A_j(t, x, \xi)$.

Т е о р е м а 2. Пусть выполнено предположение (P) и $s_j = 0$, если $r_j > 3$. Пусть выполнены условия (4) — (7) теоремы 1. Предположим, что если $r_j = 3, s_j = 1$, то в окрестности каждой точки (t, x, τ, ξ) выполнено одно из условий:

$$\langle L_{1,j}, M(R_{2,j}) \rangle = 0,$$

$$\langle L_{2,j}, M(R_{1,j}) \rangle = 0.$$

Тогда для каждой точки $(\hat{t}, \hat{x}) \in G$ существуют окрестность U и число $T < \hat{t}$ такие, что для любых $f \in C_0^\infty(\bar{U})$, $g \in C_0^\infty(\bar{S}_T)$, $S_T = U \cap \{t = T\}$ задача Коши

$$Mu = f \quad \text{в} \quad U_T^+, \quad u|_{S_T} = g$$

имеет единственное решение $u \in C^\infty(U \cap \bar{U}_T^+)$.

Для доказательства теоремы 2 строится локально параметрикс для задачи Коши в виде интегрального оператора Фурье. Наша конструкция напоминает конструкции в ^(6, 7).

Условия теоремы 2 выполнены одновременно для M и для формально сопряженного оператора M^* . Кроме того, из основных свойств интегральных операторов Фурье ⁽⁸⁾ следует существование глобального параметрикса задачи Коши. Это позволяет получить теоремы существования обобщенного решения задачи Коши и соответствующие априорные оценки.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ P. D. Lax, Duce Math. J., 24, № 4, 627 (1957). ² S. Mizohata, J. Math. Kyoto Univ., 1, № 1, 109 (1961). ³ H. O. Kreiss, Math. Scand., 13, № 1, 109 (1963). ⁴ T. Kano, Publ. PIMS Kyoto Univ., Ser. A, 5, № 2, 149 (1969). ⁵ В. М. Петков, УМН, 27, № 4, 223 (1972). ⁶ D. Ludwig, Comm. Pure and Appl. Math., 13, № 3, 473 (1960). ⁷ J. Chazarain, C. R., Ser. A, 275, № 25, 1218 (1971). ⁸ L. Hörmander, Acta Math., 127, № 1, 79 (1971).