Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 1

УДК 519.21 **МАТЕМАТИКА**

Ю. В. КУК, Ю. И. ПЕТУНИН

НАБЛЮДАЕМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

(Представлено академиком В. М. Глушковым 30 V 1972)

1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, p)$ — вероятностное пространство с σ-алгеброй $\mathfrak{A}$ и вероятностной мерой p. Рассмотрим случайный процесс $x(t, \omega)$, $t \in [0, T]$, $\omega \in \Omega$, с конечной дисперсией и постоянным математическим ожиданием m. Как известно (см. [1]), множеством $M(0, T)$ всех несмещенных линейных оценок математического ожидания m называется замыкание линейного многообразия $L(0, T) = \{u = \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu x(t_\nu) t_\nu \in [0, T], \quad \sum_{\nu=1}^{n} C_\nu = 1\}$ в метрике пространства $L_2(\Omega, \mathfrak{A}, p)$; при этом наилучшей линейной оценкой считается элемент множества $M(0, T)$ с минимальной дисперсией.

Приведенное выше определение понятия оценки неизвестного параметра m не совпадает с классическим определением оценки, поскольку в математической статистике под оценками понимаются функции, определенные на выборочном пространстве, а не на основном вероятностном пространстве Ω. Тем не менее, как показывает следующее очевидное утверждение, понятие наилучшей линейной оценки оказывается эквивалентным классическому понятию оценки.

Лемма 1. *Пусть Ω' — множество всех действительных функций, определенных на отрезке $[0, T]$, и j_x: $\Omega \to \Omega'$ — стандартное отображение вероятностного пространства Ω в Ω': $j_x(\omega) = x_\omega(t)$, где $x_\omega(t)$ — реализация случайного процесса $x(t)$ и $\mathfrak{A}'$ — σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами линейного пространства Ω'. Для наилучшей линейной оценки $m^*(\omega)$ существует единственный измеримый относительно $\mathfrak{A}'$ линейный функционал $f(\omega')$, $\omega' \in \Omega'$, не зависящий от неизвестного параметра m, такой, что коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "j_x"] \arrow[dr, "m^*(\omega)"'] & \Omega' \arrow[d] \\ & R_1 \end{tikzcd}$$

где R_1 — множество действительных чисел.

Определение. Пусть $B = B(0, T)$ — произвольное банахово пространство, элементами которого являются действительные функции, определенные на отрезке $[0, T]$. Наилучшая линейная оценка $m^*(\omega)$ неизвестного математического ожидания m называется наблюдаемой оценкой класса B', если выполнены следующие условия:

1) почти для всех элементарных исходов $\omega \in \Omega$ траектории $x_\omega(t) \in B$;

2) сужение измеримого линейного функционала f, о котором шла речь в лемме 1, на пространство B принадлежит сопряженному пространству B'.

Вопрос о том, будет ли оценка $m^*(\omega)$ наблюдаемой класса B', представляет интерес для приложений. В самом деле, при решении задач статистической обработки результатов измерений имеют дело не с истинной траекторией $x_\omega(t)$, а с некоторым ее приближением — функцией $\tilde{x}_\omega(t)$. Если известно, что $m^*(\omega)$ есть наблюдаемая оценка класса B', то из условия $\|x_\omega(t) - \tilde{x}_\omega(t)\|_B \leqslant \varepsilon$ вытекает, что

$$|f[x_\omega(t)] - f[\tilde{x}_\omega(t)]| \leqslant \|f\|_{B'}\varepsilon.$$

Напомним, что банахово пространство E называется плотно вложенным в B, если $E \subset B$, E плотно в B и

$$\|x\|_B \leqslant C\|x\|_E \quad \forall x \in E$$

(см. [2]).

Лемма 2. *Пусть $x(t)$ — стационарный случайный процесс, наблюдаемый на отрезке времени $[0, T]$ с непрерывной корреляционной функцией $r(t)$. Пусть почти при всех ω $x_\omega(t) \in B(0, T)$, $C(0, T)$ плотно вложено в $B(0, T)$ и M_C — замыкание по норме $B(0, T)$ линейного многообразия, порожденного семейством функций $f_s(t) = r(t-s) - C$, $s \in [0, T]$. Для того чтобы оценка $m^*(\omega)$ была наблюдаемой класса B', необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа C, что M_C не содержит функцию $e(t) \equiv 1$.*

Замечание 1. Легко видеть, что константа C, которая участвует в формулировке леммы 2, является дисперсией наилучшей линейной оценки $m^*(\omega)$. Из леммы 2 немедленно вытекает следующее утверждение: если $x(t)$ — случайный процесс с непрерывной периодической корреляционной функцией с периодом T, то в интервале наблюдения $[0, T]$ среднее арифметическое

$$z(\omega) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$$

является наблюдаемой оценкой класса L_p при любом $p > 1$; при этом

$$D[z(\omega)] = \frac{1}{T}\int_0^T r(t)\,dt.$$

В качестве примеров можно рассмотреть корреляционные функции $r(t) = \cos^2 t$, $T = \pi$, периодические продолжения выпуклых на отрезке $[0, T/2]$ корреляционных функций, обращающихся в нуль вне отрезка $[-T/2, T/2]$ и $r(T/2) = r(-T/2) = 0$ (см. [5]).

Однако можно показать, что стационарные случайные процессы $x(t)$, обладающие почти всюду положительной спектральной плотностью $f(\lambda)$ и корреляционной функцией $r(t) \in C^1(0, T)$, обладают наилучшей линейной оценкой, которая не является наблюдаемой оценкой класса L_2.

Теорема 1. *Пусть $x(t)$, $t \in [0, T]$, — стационарный случайный процесс с корреляционной функцией $r(t)$. Если $r(t)$ — дважды дифференцируема в интервале $[0, T]$, причем $r'(+0) \neq 0$, а $r''(t)$ есть либо ограниченная кусочно-непрерывная функция с конечным числом разрывов, либо функция ограниченной вариации, то наилучшая линейная оценка $m^*(\omega)$ неизвестного математического ожидания $x(t)$ представима в форме интеграла Стильтьеса*

$$m^* = \int_0^T x(t)\,dg(t),$$

где $g(t)$ — функция ограниченной вариации.

Замечание 2. Теорема 1 является дополнением к известному результату Я. Гаека о линейных оценках математического ожидания случайных процессов с выпуклыми корреляционными функциями (см. [3]). Используя результаты, изложенные в книге [4], и теорему 1, можно получить достаточные условия того, что оценка $m^*(\omega)$ является наблюдаемой класса $[C(0,T)]'$.

2. Перейдем теперь к изучению дисперсии наилучшей линейной оценки неизвестного математического ожидания.

Из результатов работы ([3]) вытекает

Теорема 2. *Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — стационарные случайные процессы, наблюдаемые в интервале $[0, T]$ с выпуклыми корреляционными функциями $r_1(t)$ и $r_2(t)$ соответственно. Пусть $m_i^*(\omega)$ — наилучшая линейная оценка математического ожидания $x_i(t)$, $i=1, 2$, в интервале $[0, T]$. Если $r_1(t) \leqslant r_2(t)$ при всех $t \in [0, T]$, то*

$$D(m_1^*) \leqslant D(m_2^*).$$

С помощью теоремы 2 можно получить оценки для дисперсии $D(m^*)$ наилучшей линейной оценки m в случае процессов с выпуклой корреляционной функцией $r(t)$. Если $\rho(t)$ — выпуклая ломаная на отрезке $[0, T]$ с вершинами в точках 0, ${}^1/_3T$, ${}^2/_3T$, T, то указанная дисперсия D для случайного процесса с корреляционной функцией $\rho(t)$ имеет вид

$$D = \frac{(1+\rho(T))(1+\rho(^1/_3T)) - (\rho(^1/_3T)+\rho(^2/_3T))^2}{4 - 4\rho(^2/_3T) + 2\rho(T) - 2\rho(^1/_3T)}.$$

Полагая $\rho(^1/_3iT) = r(^1/_3iT)$, $i = 0, 1, 2, 3$, мы получаем оценку сверху для $D(m^*)$, ибо $D(m^*) \leqslant D$; если же $\rho(t)$ построена так, что $r(t) \geqslant \rho(t)$ $\forall t \in [0, T]$, то $D(m^*) \geqslant D$. Отметим в заключение, что на основании этих идей можно доказать неравенство

$$D(m^*) \geqslant \frac{(1-r(T))^2}{1-r(T)+T\,|r'(0)|} + r(T) = C(T),$$

так как $C(T) \geqslant 1 / (1 + T|r'(0)|) = C_1(T)$, то оценка $C(T)$ более точная, чем оценка снизу $C_1(T)$, полученная Я. Гаеком в ([3]).

Институт кибернетики
Академии наук УССР
Киев

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
25 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] У. Гренандер, Случайные процессы и статистические выводы, М., 1961. [2] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, УМН, 21, 2 (128) (1966). [3] Я. Гаек, Чехосл. матем. журн., 6 (81), 94 (1956). [4] Г. Крамер, М. Лидбеттер, Стационарные процессы, М., 1969. [5] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, 2, М., 1967.