Доклады Академии наук СССР
1973. Том 210, № 2

УДК 532.516

ГИДРОМЕХАНИКА

К. И. БАБЕНКО

О СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 17 VII 1972)

1. Рассмотрим обтекание конечного тела $B \subset R^3$ потоком вязкой несжимаемой жидкости. В силу постоянства плотности течение описывается вектором скорости u и давлением p, которые удовлетворяют системе уравнений Навье — Стокса

$$u\cdot\nabla u + \operatorname{grad} p = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u, \qquad \operatorname{div} u = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям на теле

$$u|_{\partial B} = u_0 \tag{2}$$

и в бесконечно удаленной точке

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = u_\infty. \tag{3}$$

Систему координат всегда можно выбрать так, чтобы $u_\infty = (1, 0, 0)$: в соответствии с (1) в качестве единицы длины взят диаметр области B.

Если выполнено условие

$$\int_{\partial B} u_0\cdot n\, d\sigma = 0, \tag{4}$$

где n — нормаль к ∂B, а $d\sigma$ — лебегова мера на ∂B, то доказано существование решения задачи обтекания, для которого конечен интеграл Дирихле

$$\int_G |\nabla u|^2 dx < \infty, \qquad G = R^3 \setminus B.$$

Первоначально теорема существования решения получена Лерэ ([1,2]), причем он показал, что условие (2) выполняется, а условие (3) выполнено лишь в следующем обобщенном смысле:

$$\int_G \frac{|u(x) - u_\infty|^2}{|x-y|^2}\, dx < \infty \qquad \forall y \in R^3. \tag{5}$$

Иные варианты доказательства даны рядом авторов ([3–5]). О. А. Ладыженская ([3]) ввела обобщенные решения уравнений Навье — Стокса и, пользуясь методами функционального анализа, получила теорему существования; выполнимость (3) ею не доказана. Позже Финн ([6]) показал, что для произвольного решения (u, p) системы (1), для которого выполнено (5), существует вектор u^* такой, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = u^*$. Отсюда немедленно вытекает выполнимость условия (3) в теореме Лерэ. Независимо Фаддеев ([3]) установил выполнимость (3) для класса обобщенных решений Ладыженской.

Поведение решения вдали от тела представляет существенный интерес. Известно, что реальное течение сзади тела при больших расстояниях от тела таково, что скорость $u(x)$ заметно отличается от своего предельного значения u_∞ лишь в сравнительно узкой области вокруг оси x_1. Это так называемая область следа. В область следа попадают частицы, проходящие в непосредственной близости от тела, и поэтому течение внутри следа существенно вихревое. Вне следа течение практически потенциальное.

Без строгого доказательства асимптотика течения внутри следа определена в монографии [7]. Рассмотрим систему Озеена, отвечающую нашей задаче обтекания:

$$\Delta v - 2\lambda \frac{\partial v}{\partial x_1} - 2\lambda \operatorname{grad} p = 0, \qquad (6)$$
$$\operatorname{div} v = 0;$$

в этих уравнениях $2\lambda = \mathrm{Re}$.

Как известно, фундаментальная матрица $H(x-y) = (H_{ij}(x-y))$ системы (6) и соответствующее «давление» $\{q_i(x-y)\}$ определяются соотношениями

$$H_{ij}(x-y) = \delta_{ij}\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad 2\lambda q_i(x-y) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{4\pi\,|x-y|}\right), \qquad i, j = 1, 2, 3, \qquad (7)$$

где

$$\Phi = \Phi(s) = -\frac{1}{8\pi\lambda}\int\limits_0^{\lambda s}(1-e^{-t})\frac{dt}{t}, \qquad s = |x-y| - x_1 + y_1.$$

В (7) приводится формула, по существу эквивалентная соотношению

$$u \simeq u_\infty + H(x)\cdot F, \qquad (8)$$

где F — вектор силы, с которой поток действует на тело. Однако до последнего времени получить обоснование формулы (8) или даже как-то уточнить соотношение (3) не удавалось. Финн в работе [8], постулируя соотношение

$$u(x) - u_\infty = O(|x|^{-\alpha}), \qquad \alpha > {}^1/_2, \qquad (9)$$

вывел строго формулу (8) и дал оценку остаточного члена. Впоследствии появилось довольно много работ, в которых исследуются решения, подчиненные условию (9). Финн показал, что при малых Re существуют такие решения задачи обтекания. В. В. Пухначев [9] установил, что в случае осесимметричных течений условие [9] можно заменить более слабым односторонним неравенством, с тем чтобы оставалась асимптотическая формула (9).

Актор [10], исследуя плоские течения, установил, что из условия (9) с $\alpha > {}^1/_4$ вытекает экспоненциальное убывание вихря вне следа. Метод доказательства не зависит от числа измерений и несколько позже автор и М. М. Васильев [11] этим методом получили такой же результат для вихря в пространственном случае и существенно уточнили формулу (8). Сходные результаты для вихря в общем случае получены Д. Кларком [12] и для осесимметричного обтекания Пухначевым.

2. Ниже мы наметим ход доказательства теоремы, согласно которой для любого решения задачи обтекания с конечным интегралом Дирихле выполняется соотношение (9).

Введем следующее обозначение:

$$|\varphi|_{D,r} = \left(\int\limits_D |\varphi(x)|^r dx\right)^{1/r},$$

где D — некоторая область в R^3. Если $D = R^3$ или $D = G$, будем писать просто $|\varphi|_r$. В доказательстве существенны следующие предположения.

Предположение 1. *Пусть* $\varphi \in H_2^1$, $\varphi(x) \to 0$ *при* $|x| \to \infty$ *и* $|\varphi_{x_1}|_r < \infty$, *где* $1 < r < 2$. *Тогда*

$$|\varphi|_{3r} \leqslant B(|\varphi_{x_1}|_r |\varphi_{x_2}|_2 |\varphi_{x_3}|_2)^{1/3}.$$

Предположение 2. *Оператор*

$$h_{klm}(\varphi) = \int\limits_{R^3} \frac{\partial}{\partial x_m} H_{kl}(x-y)\, \varphi(y)\, dy$$

при $m = 1$ *является оператором из* L^r *в* L^r *и*

$$|h_{kl1}(\varphi)|_r < A_r |\varphi|_r, \quad 1 < r < \infty.$$

Если $m = 2, 3$, *то* $h_{klm}(\varphi)$ *оператор из* L^r *в* L^σ, $1/\sigma = 1/r - 1/4$, *причем*

$$|h_{klm}(\varphi)|_\sigma < B_{r\sigma} |\varphi|_r, \quad 1 < r < 4.$$

Это предложение легко вытекает из известных факторов о мультипликаторах интегралов Фурье.

Положим $v = u - u_\infty$ и пусть f — вектор с компонентами

$$f_j = 2\lambda \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Финн показал, что решение с конечным интегралом Дирихле представляется с помощью формулы Грина

$$v(x) = \int\limits_G H(x-y) f(y)\, dy + J_0(y), \tag{10}$$

где $J_0(x)$ определяется некоторым интегралом по ∂B. Нетрудно показать, что $J_0(x) \in L^r(G)$ $\forall r > 2$ и что $\frac{\partial}{\partial x_1} J_0(x) \in L^r$ $\forall r > 1$. Используя представление (10) и предыдущие предложения, сравнительно несложно показать, что имеет место

Предложение 3. *Если* (u, p) — *решение задачи обтекания с конечным интегралом Дирихле и* $v = u - u_\infty$, *то*

$$|v|_4 < \infty.$$

В дальнейшем предложение 3 играет существенную роль.

Проинтегрируем по частям в интеграле (10). Тогда

$$v(x) = -2\lambda \int\limits_G \sum_{j=1}^{3} v_j(y) \frac{\partial H(x-y)}{\partial y_j} v(y)\, dy + J_1(x), \tag{11}$$

где $J_1(x)$ — интеграл, аналогичный $J_0(x)$. Используя это представление и предложение 2, легко доказать

Предложение 4. *Если существует* r_0 *такое, что* $r_0 < 4$ *и* $|v|_{r_0} < \infty$, *то* $|v|_r < \infty$ $\forall r > 2$.

Положим $\varphi(\xi) = \max\limits_{|x| \geqslant \xi} |v(x)|$, $\xi \geqslant 1$. Простым следствием предыдущего предложения является

Предложение 5. *При* $\xi, \eta > 1$ *имеет место неравенство*

$$\varphi(\xi) \leqslant A[\varphi^\beta(\eta) + (\xi - \eta)^{-\beta} + \xi^{-1}],$$

где β *сколь угодно мало отличается от* $^3/_2$.

Отсюда вытекает

Предложение 6. *Существует* ξ^* *такое, что при* $\xi > \xi^*$

$$\varphi(\xi) < (8/\xi)^{1/\beta}.$$

Таким образом, все свелось к доказательству того, что $|v|_{r_0} < \infty$ для некоторого $r_0 < 4$.

Введем усеченное фундаментальное решение системы (6) следующими соотношениями:

$$\widetilde{H}_{ij}(x, y) = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\theta(y) \frac{\partial \Phi(s)}{\partial y_k}\right) - \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\theta(y) \frac{\partial \Phi(s)}{\partial y_j}\right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

и

$$2\lambda \widetilde{q}_i(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{\theta(y)}{4\pi |x - y|}\right), \quad i = 1, 2, 3,$$

где $\theta(y) = \theta(y_2, y_3)$. В последующем выберем $\theta = \theta_N \in C^\infty$ так, чтобы $\theta \equiv 1$ при $y_2^2 + y_3^2 \leqslant N$ и $\theta \equiv 0$ при $y_2^2 + y_3^2 \geqslant 2N$. Пусть $D = D_N = \{y\colon |y_1| \leqslant N,\ y_2^2 + y_3^2 \leqslant 2N\} \setminus B$. Применяя матрицу $\widetilde{H}(x, y)$, выведем аналог формулы Грина для области D. В результате получим интегральное представление, подобное (10). Используя это представление и предложения 2, 3, удается показать, что для некоторой последовательности $\{N_k\}$, $N_k \uparrow \infty$,

$$|v|_{D_{N_k}, r} \leqslant C < \infty,$$

если $r < 4$ и $4 - r$ достаточно мало.

Тем самым доказательство соотношения (9) закончено.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Leray, J. Math. pures et appl., S. 9, **12**, 1 (1933). [2] J. Leray, Enseign. Math., **35**, 139 (1936). [3] О. А. Ладыженская, УМН, **14**, в. 3, 75 (1959). [4] H. Fujita, J. Fac Sci. Univ. Tokyo, **9**, 59 (1961). [5] R. Finn, Acta Math., **105**, 197 (1961). [6] R. Finn, Arch. Rational Mech. Anal., **3**, 381 (1959). [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., 1959. [8] R. Finn, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. RPR, **3**(51), 387 (1959). [9] В. В. Пухначев, Динамика сплошной среды, в. 8, Новосибирск, 1971. [10] К. И. Бабенко, ПММ, **34**, в. 5, 911 (1970). [11] К. И. Бабенко, М. М. Васильев, Препринт Инст. прикладной математики АН СССР. М., № 84, 1971. [12] D. Clark, Ind. Math. J., **20**, № 7, 633 (1971).