

С. Х. АЙТЯН, Ю. А. ЧИЗМАДЖЕВ

ФОРМАЛИЗМ КОРРЕЛЯТИВНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Фрумкиным 1 XII 1972)

Большой интерес представляют нейронные сети с ограниченным числом каналов связи у каждого нейрона. Изучение таких сетей может пролить свет на многие явления в сложных нервных образованиях и, в частности, на проблему фибрилляции. Подобные сети уже рассматривались ранее в литературе ⁽¹⁻³⁾. Однако в этих работах время считалось дискретным, а также возникал ряд трудностей при учете рефрактерности. В настоящей работе предлагается математический формализм, позволяющий описывать сети с учетом корреляций между соседними нейронами.

Сформулируем поведение отдельного нейрона. Время, отсчитываемое от момента последнего возбуждения нейрона, будем называть возрастом τ . При $\tau \in (0, \tau_A)$ нейрон активен и посылает по всем каналам связи одинаковые потоки сигнала j . При $\tau \in (\tau_A, T)$ нейрон рефрактерен. При этих возрастах

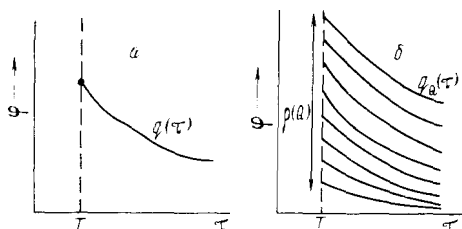


Рис. 1. Зависимость порога от возраста (а) и семейство возможных зависимостей порога от возраста $\{q_Q(\tau)\}$ при случайном выборе начального значения $q(T) = Q$ (б)

$\tau \in (0, T)$ нейрон не воспринимает сигналов, а при возрастах $\tau > T$ накапливает сигнал ϕ , пришедший к нему от соседних нейронов по закону

$$\partial\phi/\partial t = -\theta\phi + J, \quad (1)$$

где θ^{-1} — память нейрона, J — полный поток сигнала на нейрон.

Когда накопленный сигнал достигает порога $q(\tau)$ (рис. 1а), где

$$q(\tau) = \begin{cases} \infty, & \tau < T, \\ q(\tau), & \tau > T, \end{cases} \quad (2)$$

нейрон вновь возбуждается, возраст его становится равным нулю, а накопленный сигнал сбрасывается до нуля.

Для описания сети, составленной из таких нейронов, вводятся коррелятивные функции распределения по фазовому пространству (τ, ϕ) . $F_1(t, x, \tau, \phi)$ — унарная функция распределения, где t и x — время и координата нейрона. Вероятность здесь и далее рассматривается в смысле вероятности по ансамблю. Аналогично вводятся коррелятивные функции высших порядков, вплоть до полной функции распределения $F_N(t, x_1, \dots, x_N, \tau_1, \dots, \tau_N, \phi_1, \dots, \phi_N)$, где N — полное число нейронов в сети.

Рассмотрим нейронную сеть, в которой каждый нейрон связан с n другими и при выходе из рефрактерности, т. е. при $\tau = T$, случайным образом реализуется порог $q(T) = Q$, а дальше порог уже вполне определенно зависит от возраста согласно выбранному Q , аналогично ⁽⁴⁾. Будем считать, что кривые зависимости порога от возраста $q_Q(\tau)$ не пересекаются друг с другом в области $\tau > T$, а выбор начального порога Q производится согласно функции распределения $\rho(Q)$ (рис. 1б).

При $\tau < T$ имеем

$$\partial F_1 / \partial t = -\partial F_1 / \partial \tau. \quad (3)$$

В области же $\tau > T$ уравнение для F_1 принимает вид

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\partial F_1}{\partial \tau} + \theta \varphi \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} - j \sum_{z=1}^n z \mathfrak{M} \left(z; \frac{\partial F_{n+1}}{\partial \varphi} \right) - \sum_{z=1}^n \lambda_z(\varphi) \mathfrak{M}(z; F_{n+1}); \quad (4)$$

$\mathfrak{M}(z; F_{n+1})$ означает оператор интегрирования,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(z; F_{n+1}) = & \sum_{i_1, \dots, i_n} \underbrace{\int_0^{\tau_A} d\tau_{i_1} \int_0^{\infty} d\varphi_{i_1} \dots \int_0^{\tau_A} d\tau_{i_z} \int_0^{\infty} d\varphi_{i_z}}_z \times \\ & \times \underbrace{\int_{\tau_A}^{\infty} d\tau_{i_{z+1}} \int_0^{\infty} d\varphi_{i_{z+1}} \dots \int_{\tau_A}^{\infty} d\tau_{i_n} \int_0^{\infty} d\varphi_{i_n}}_{n-z} F_{n+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

В выражении (5) сумма берется по всевозможным перестановкам $i_1, \dots, i_n$, в функции F_{n+1} для удобства индексы у переменных τ_i, φ_i ставятся только для соседних нейронов, а для самого рассматриваемого нейрона фазовые переменные τ, φ пишутся без индексов. Поэтому (5) означает интегрирование только по соседним нейронам и имеет смысл вероятности того, что активны z из n нейронов, связанных с рассматриваемым. Первый член в правой части (4) означает старение нейрона, второй — утечку сигнала, третий — влияние окружения, а четвертый — реализацию порога при данном уровне сигнала φ . $\lambda_z(\varphi)$ определено как плотность вероятности иметь порог, равный φ , при выборе из нейронов, имеющих порог не меньше чем φ , так как нейроны, имеющие порог ниже φ , уже возбуждены и в выборке не участвуют;

$$\lambda_z(\varphi) = \begin{cases} z j \rho(\varphi) / \int_{\varphi}^{\infty} \rho(\xi) d\xi & \text{при } \theta \varphi \leq z j, \\ 0 & \text{при } \theta \varphi > z j. \end{cases} \quad (6)$$

Уравнения (3) и (4) описывают унарную функцию распределения. Добавим к ним краевые условия

$$F_1(t, x, 0, \varphi) = G(t, x, 0) \delta(\varphi). \quad (7)$$

Выражение (7) говорит о том, что непосредственно после возбуждения нейрон не имеет накопленного сигнала.

Следующее условие — это аналог уравнения неразрывности

$$G(t, x, 0) = j \int_T^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} d\varphi \rho(\varphi) \sum_{z=1}^n z \mathfrak{M}(z; F_{n+1}). \quad (8)$$

Необходимо также начальное условие

$$F_1(t_0, x, \tau, \varphi) = F_0(x, \tau, \varphi), \quad (9)$$

условие сшивки функции F_1 при $\tau = T$

$$F_1(t, x, T-0, \varphi) = F_1(t, x, T+0, \varphi), \quad (10)$$

а также условие нормировки

$$\int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} d\varphi F_1 = 1. \quad (11)$$

Уравнения (3) и (4) не замкнуты, так как включают в себя коррелятивную функцию F_{n+1} . Для их замыкания необходимо писать уравнения для F_{n+1} , которые будут включать в себя коррелятивные функции более

высокого порядка ⁽⁵⁾ и т. д. вплоть до уравнений для полной F_N . В настоящей работе мы ограничимся суперпозиционным приближением для F_{n+1} и рассмотрим стационарный и пространственно-однородный режим

$$F_{n+1}(t, x, x_1, \dots, x_n, \tau, \tau_1, \dots, \tau_n, \varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = \\ = F_1(\tau, \varphi) \cdot F_1(\tau_1, \varphi_1) \cdot \dots \cdot F_1(\tau_n, \varphi_n). \quad (12)$$

Для простоты будем считать также, что нейроны обладают бесконечной памятью, т. е. $\theta = 0$. Тогда (3) и (4) принимают вид

$$\frac{\partial F_1}{\partial \tau} = \begin{cases} 0 & \tau < T, \end{cases} \quad (13)$$

$$-nja \partial F_1 / \partial \varphi - nja F_1 \rho(\varphi) / \int_{\varphi}^{\infty} \rho(\xi) d\xi, \quad \tau > T, \quad (14)$$

$$a \equiv \int_0^{\tau_A} d\tau \int_0^{\infty} d\varphi F_1,$$

a — вероятность активности нейрона.

Краевое условие (7) в этом случае принимает вид

$$F_1(0, \varphi) = a/\tau_A \delta(\varphi). \quad (15)$$

Решая (13) и (14) с условиями (10) и (15), получаем

$$F_1 = \begin{cases} a/\tau_A \delta(\varphi), & \tau \leq T, \end{cases} \quad (16)$$

$$\frac{a}{\tau_A} \left[\int_{\varphi}^{\infty} \rho(\xi) d\xi \right] \delta(\varphi - nja(\tau - T)), \quad \tau > T. \quad (17)$$

Условие неразрывности (8) в рассматриваемом случае выполняется тождественно.

Из выражений (13) и (14) получаем плотность распределения нейронов по возрасту

$$\mathcal{F}(\tau) = \begin{cases} a/\tau_A, & \tau \leq T, \\ a/\tau_A \int_{\gamma}^{\infty} \rho(\xi) d\xi, & \tau > T. \end{cases} \quad (18)$$

А из условия нормировки (11) получим уравнение для нахождения неизвестной пока величины вероятности активности a :

$$\frac{a}{\tau_A} \int_T^{\infty} d\tau \int_{\gamma}^{\infty} \rho(\xi) d\xi = 1 - a(1 + \kappa), \quad (19)$$

$$\gamma = nja(\tau - T), \quad \kappa = (T - \tau_A) / \tau_A.$$

Рассмотрим несколько простых примеров. Будем задавать различные виды распределения по порогам $\rho(Q)$, считая для простоты, что при $\tau \geq T$ порог не зависит от возраста, т. е.

$$q(\tau) = \begin{cases} \infty, & \tau < T, \\ Q, & \tau \geq T. \end{cases} \quad (20)$$

$$\text{I. } \rho(Q) = \delta(Q - Q_0), \quad (21)$$

т. е. все нейроны имеют одинаковый порог Q_0 . Тогда из (13) и (14) получим выражения для распределения по возрасту и для вероятности активности

$$\mathcal{F}(\tau) = \begin{cases} a/\tau_A, & \tau \leq \tau_0, \\ 0, & \tau > \tau_0, \end{cases} \quad (22)$$

$$a = (nj\tau_A - Q_0) / nj\tau_A(1 + \kappa), \quad \tau_0 = T + Q_0 / (nja). \quad (23)$$

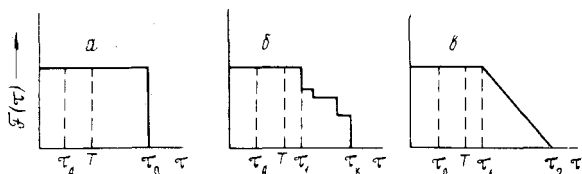


Рис. 2. Распределение по возрасту в случае: а — I, б — II, в — III

показан на рис. 2а. Аналогичные результаты были получены в (6).

$$\text{II. } \rho(Q) = \sum_{i=1}^k \beta_i \delta(Q - Q_i), \quad \sum_{i=1}^k \beta_i = 1, \quad (25)$$

т. е. реализуются пороги Q_i со статистическим весом β_i . Тогда выражение для распределения по возрасту примет вид

$$\mathcal{F}(\tau) = \begin{cases} a/\tau_A, & \tau \leq \tau_1, \\ \frac{a}{\tau_A} \left(1 - \sum_{i=1}^s \beta_i\right), & \tau_{s-1} < \tau \leq \tau_s; \end{cases} \quad (26)$$

$$a = (nj\tau_A - \sum_{i=1}^k \beta_i Q_i) / nj\tau_A (1 + \kappa); \quad \tau_i = T + Q_i/(nja). \quad (27)$$

Вид этого распределения по возрасту показан на рис. 2б. Из выражения (27) получим условие существования стационарного режима.

$$nj\tau_A > \sum_{i=1}^k \beta_i Q_i. \quad (28)$$

$$\text{III. } \rho(Q) = \begin{cases} 1/(Q_2 - Q_1), & Q_1 < Q < Q_2, \\ 0 & \text{для других } Q, \end{cases} \quad (29)$$

т. е. все нейроны равновероятно распределены по порогам из непрерывной области между Q_1 и Q_2 . Тогда получим

$$a = (nj\tau_A - 1/2(Q_2 - Q_1)) / nj\tau_A (1 + \kappa). \quad (30)$$

Условие существования в этом случае запишется в виде

$$nj\tau_A > 1/2(Q_2 - Q_1). \quad (31)$$

Для функции распределения по возрасту получим зависимость, показанную на рис. 2в.

$$\mathcal{F}(\tau) = \begin{cases} a/\tau_A, & \tau \leq \tau_1, \\ \frac{a}{\tau_A} \cdot \frac{Q_2 - nja(\tau - T)}{Q_2 - Q_1}, & \tau_1 \leq \tau < \tau_2, \\ 0, & \tau_2 \leq \tau, \end{cases} \quad (32)$$

$$\tau_1 = T + Q_1/(nja), \quad \tau_2 = T + Q_2/(nja). \quad (33)$$

В заключение мы хотим выразить благодарность В. С. Маркину и В. Ф. Пастушенко за обсуждение работы.

Институт электрохимии
Академии наук СССР
Москва

Поступило
21 XI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. R. Caianiello, J. Theoret. Biol., 1, 204 (1961). ² М. Оонuki, IV Международный биофизический конгресс, Тез. секцион. докл., 3, М., 1972, стр. 353. ³ О. Н. Ставская, И. И. Пятецкий-Шапиро, Проблемы кибернетики, в. 2 (1968). ⁴ В. Л. Дунин-Барковский, А. Н. Четаев, Биофизика, 16, 911 (1971). ⁵ Н. Н. Боголюбов, Избр. труды в трех томах, 2, Киев, 1970. ⁶ В. Ф. Пастушенко, В. С. Маркин, Ю. А. Чизмаджев, IV Международн. биофизич. конгресс, Тез. секцион. докл., 3, М., 1972, стр. 291.