Доклады Академии наук СССР
1973. Том 209, № 4

УДК 517.91 **МАТЕМАТИКА**

К. С. СИБИРСКИЙ, Н. К. ЧЕБАН

КЛАССИФИКАЦИЯ УСТОЙЧИВЫХ ПО ПУАССОНУ ТОЧЕК В ДИСПЕРСНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 21 VI 1972)

1°. Различные классы устойчивых по Пуассону движений и точек обычных динамических систем [1, 2] вводились в разное время из различных соображений. Б. А. Щербаковым [3, 4] был впервые дан общий принцип классификации устойчивых по Пуассону движений. При этом им был обнаружен новый, до него никем не исследованный, класс таких движений — псевдорекуррентные движения.

До сих пор, однако, не существует сколько-нибудь удовлетворительной классификации устойчивых по Пуассону точек дисперсных динамических систем (системы без единственности). Отметим, что для дисперсных систем можно (как это и делается в работах разных авторов) вводить неэквивалентные определения понятий, которые для систем с единственностью совпадают.

Цель настоящей заметки — построить такой единый общий принцип классификации устойчивых по Пуассону точек для дисперсных динамических систем, при котором сохранялось бы как можно больше свойств движений для случая динамических систем с единственностью.

Дисперсные динамические системы (д.д.с.) были введены Е. А. Барбашиным [5, 6]. И. У. Бронштейн [7, 8] предложил концепцию полугрупповых д.д.с. Ее мы и будем придерживаться в этой заметке.

Под *дисперсной динамической системой* будем понимать совокупность $[R, I^+, f]$, состоящую из метрического пространства R с метрикой ρ, полугруппы I^+ всех неотрицательных вещественных чисел и функции f, которая каждой точке $p \in R$ и числу $t \in I^+$ ставит в соответствие непустой компакт $Q \subseteq R$ и обладает следующими свойствами (для $A \subseteq R$ и $K \subseteq I^+$ положим $f(A, K) = \bigcup_{p \in R,\, t \in K} f(p, t)$):

1) $f(p, 0) = p$ для любой точки $p \in R$;

2) $f(f(p, t_1), t_2) = f(p, t_1 + t_2)$ при любых $p \in R$, t_1 и $t_2 \in I^+$;

3) для любых $p \in R$, $t \in I^+$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что неравенство

$$\beta(f(q, t), f(p, t)) < \varepsilon \tag{1}$$

(β — полуотклонение по Хаусдорфу) выполняется, как только $\rho(p, q) < \delta$ (аксиома полунепрерывности).

Для $A \subseteq R$ положим

$$S(A, \delta) = \{p \in R \colon \rho(p, A) < \delta\}, \quad \Sigma_A^+ = \overline{f(A, I^+)}.$$

Иногда аксиома полунепрерывности заменяется более сильным условием:

для любых $p \in R$, $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при всех $q \in S(p, \delta)$ и $t \in [0, T]$ выполнено неравенство (1) (аксиома интегральной полунепрерывности).

Точку $p \in R$ назовем точкой непрерывности, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t \in I^+$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $q \in S(p, \delta)$ имеет место неравенство

$$\alpha(f(q, t), f(p, t)) < \varepsilon, \tag{2}$$

где α — отклонение по Хаусдорфу.

Точку $p \in R$ назовем точкой интегральной непрерывности, если для любых $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $q \in S(p, \delta)$ и $t \in [0, T]$ выполнено неравенство (2).

Непрерывности функции $f(p, t)$ по t мы не предполагаем.

2°. Определение 1. Точку $p \in R$ назовем устойчивой по Пуассону, если для любых $\varepsilon > 0$, q и $r \in f(p, I^+)$ существует такая однозначная функция $T = T(\varepsilon, q, r) > 0$, что

$$\rho(q, f(r, [0, T])) < \varepsilon. \tag{3}$$

Если функцию $T = T(\varepsilon, q, r)$ можно подобрать так, чтобы она не зависела:

1) от r, то точку $p \in R$ назовем почти рекуррентной;
2) от q, то точку $p \in R$ назовем слабо рекуррентной;
3) от ε, то точку $p \in R$ назовем особой;
4) от q и r, то точку $p \in R$ назовем рекуррентной;
5) от ε и r, то точку $p \in R$ назовем **особо почти рекуррентной**;
6) от ε и q, то точку $p \in R$ назовем особо слабо рекуррентной;
7) от ε, q и r, то точку $p \in R$ назовем особо рекуррентной.

Обозначим через P (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7) множество всех устойчивых по Пуассону (соответственно почти рекуррентных, слабо рекуррентных, особых, рекуррентных, особо почти рекуррентных, особо слабо рекуррентных и особо рекуррентных) точек $p \in R$. Из определения следует, что все множества $P, P_1, \ldots, P_7$ полуинвариантны, т. е. $f(P_i, I^+) \subseteq P_i$. Ясно, также, что $P_i \subseteq P$, $i = 1, 2, \ldots, 7$,

$$P_7 \subseteq \bigcap_{i=1}^{6} P_i, \quad P_4 \subseteq P_1 \cap P_2, \quad P_5 \subseteq P_1 \cap P_3, \quad P_6 \subseteq P_2 \cap P_3. \tag{4}$$

Лемма 1. *Точка $p \in R$ является слабо рекуррентной тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon > 0$ и $r \in f(p, I^+)$ существует такое $T > 0$, что*

$$f(p, I^+) \subseteq S(f(r, [0, T]), \varepsilon). \tag{5}$$

Лемма 2. *Точка $p \in R$ является рекуррентной тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $T > 0$, что для любой точки $r \in f(p, I^+)$ имеет место включение* (5).

Лемма 3. *Тогда $p \in R$ является особо слабо рекуррентной тогда и только тогда, когда для любой точки $r \in f(p, I^+)$ существует такое $T > 0$, что*

$$\overline{f(p, I^+)} = \overline{f(r, [0, T])}. \tag{6}$$

Лемма 4. *Точка $p \in R$ является особо рекуррентной тогда и только тогда, когда существует такое $T > 0$, что для любой точки $r \in f(p, I^+)$ имеет место равенство* (6).

3°. В этом пункте I — множество всех действительных чисел, $[R, I, f]$-обычная динамическая система с единственностью ([1], [2]). Наряду с ней будем рассматривать соответствующую полугрупповую систему $[R, I^+, f]$.

Нетрудно заметить, что для $[R, I, f]$ точка $p \in R$ является устойчивой по Пуассону (соответственно почти рекуррентной, рекуррентной, особой) в обычном смысле ([1], [2]), тогда и только тогда, когда она обладает таким же свойством для соответствующей системы $[R, I^+, f]$ в смысле определения 1. В то же время для $[R, I^+, f]$ точка p является особо почти рекуррентной (особо слабо рекуррентной, особо рекуррентной) в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда она является особой для системы $[R, I, f]$ (т. е. точкой покоя или периодической точкой). Примеры показывают, что для д.д.с. множества P_3, P_5, P_6 и P_7 различны.

Остается рассмотреть вопрос о том, какие точки соответствуют в системе $[R, I, f]$ слабо рекуррентным точкам $[R, I^+, f]$. Такие точки будем называть для $[R, I, f]$ слабо рекуррентными в положительном направлении.

Простые примеры позволяют установить, что класс слабо рекуррентных в положительном направлении точек не охватывает множество всех псевдорекуррентных точек и не содержится в последнем. Тем самым данная нами классификация устойчивых по Пуассону точек выявляет и для обычных динамических систем Биркгофа новый класс движений. Имеет место

Теорема 1. *Для динамической системы $[R, I, f]$ точка $p \in R$ является слабо рекуррентной в положительном направлении тогда и только тогда, когда она устойчива по Пуассону в положительном направлении, а полутраектория $f(p, I^+)$ вполне ограничена.*

Ввиду того что в полном пространстве вполне ограниченность равносильна компактности, из теоремы 1 вытекают

Следствие 1. *В полном пространстве точка $p \in R$ является слабо рекуррентной в положительном направлении для системы $[R, I, f]$ тогда и только тогда, когда она устойчива по Пуассону и по Лагранжу в положительном направлении.*

Следствие 2. *В компактном пространстве R для системы $[R, I, f]$ слабая рекуррентность в положительном направлении совпадает с устойчивостью по Пуассону в положительном направлении.*

4°. Теорема 2. *Пусть выполнена аксиома интегральной полунепрерывности, Σ_p^+ состоит из точек непрерывности, а точка p почти рекуррентна (рекуррентна, особо рекуррентна).*

Тогда в Σ_p^+ все точки почти рекуррентны (рекуррентны, особо рекуррентны).

Примеры показывают, что в этой теореме условие непрерывности точек множества Σ_p^+ существенно и что даже при наличии интегральной непрерывности в замыкании воронки слабо рекуррентной точки могут быть точки, не являющиеся слабо рекуррентными и даже не являющиеся устойчивыми по Пуассону, а для особо почти рекуррентной (и тем более особой) точки p в Σ_p^+ могут быть и точки, не являющиеся особо почти рекуррентными и даже не являющиеся особыми.

Теорема 3. *Пусть $p \in P_5 \cap P_6$ и на воронке $f(p, I^+)$ существует хотя бы одна точка непрерывности. Тогда $p \in P_7$.*

Теорема 4. *Если $p \in P_1 \cap P_2$ и на воронке $f(p, I^+)$ существует хотя бы одна точка, для которой имеет место аксиома интегральной непрерывности, то $p \in P_4$.*

Будем теперь рассматривать лишь д.д.с., у которых на каждой воронке $f(p, I^+)$ имеется хотя бы одна точка интегральной непрерывности. Как следует из работы ([6]), множество таких д.д.с. довольно обширно.

Используя теоремы 3 и 4 и включения (4), будем строить индуцированное классами P_j, $j = 1, 2, \ldots, 7$, разбиение множества P всех устойчивых по Пуассону точек на попарно непересекающиеся классы K_i, $i = 1, 2, \ldots m$ ([9]), т. е. такое разбиение, при котором число m минимально и каждый из классов P_j есть объединение некоторого числа классов K_i.

Это разбиение может состоять лишь из следующих 13 классов:

$$K_1 = P \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3), \quad K_2 = P_1 \setminus (P_2 \cup P_3),$$
$$K_3 = P_3 \setminus (P_1 \cup P_2), \quad K_4 = P_2 \setminus (P_1 \cup P_3),$$
$$K_5 = (P_1 \cap P_3) \setminus (P_2 \cup P_5), \quad K_6 = (P_2 \cap P_3) \setminus (P_1 \cap P_6),$$
$$K_7 = K_5 \setminus P_2, \quad K_8 = P_6 \setminus P_1, \quad K_9 = P_4 \setminus P_3,$$
$$K_{10} = (P_3 \cap P_4) \setminus (P_5 \cup P_6), \quad K_{11} = (P_4 \cap P_6) \setminus P_5,$$
$$K_{12} = (P_4 \cap P_5) \setminus P_6, \quad K_{13} = P_7.$$

Авторам известны примеры, свидетельствующие о непустоте всех этих классов, за исключением класса K_{11}.

Остается открытым вопрос: существует ли рекуррентная, особо слабо рекуррентная точка, не являющаяся особо почти рекуррентной?

Институт математики с Вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
15 III 1972

Тираспольский педагогический институт
им. Т. Г. Шевченко

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., 1949. [2] К. С. Сибирский, Введение в топологическую динамику, Кишинев, 1970. [3] Б. А. Щербаков, ДАН, **146**, № 2 (1962). [4] Б. А. Щербаков, Изв. АН Молд. ССР, № 1 (1963). [5] Е. А. Барбашин, ДАН, **41**, № 4 (1943). [6] Е. А. Барбашин, Уч. зап. Московск. унив., **135**, № 2 (1948). [7] И. У. Бронштейн, ДАН, **144**, № 5 (1962). [8] И. Я. Бронштейн, ДАН, **151**, № 1 (1963). [9] А. Г. Курош, Лекции по общей алгебре, М., 1962.